



Universidad
de Huelva

CONTROL POR COMPUTADOR

Temario.

Ingeniería Informática.

Realizado por:

Juan Manuel Bardallo González

Miguel Ángel de Vega Alcántara

Huelva. Curso 06/07.

INDICE

Tema 1. MODELIZACIÓN DE SISTEMAS DISCRETOS

- 1.1 Introducción.
- 1.2 Sistema de control realimentado.
- 1.3 Transformada Z.
- 1.4 Transformada Z inversa.
- 1.5 Función de transferencia de un sistema discreto.
- 1.6 Ejemplos de diseño.
- 1.7 Análisis por computador de sistemas discretos: Simulación mediante MATLAB.

Tema 2. SISTEMAS MUESTREADOS

- 2.1 Introducción.
- 2.2 Mantenedores y Muestreadores de señal.
- 2.3 Función de transferencia de un sistema discreto.
- 2.4 Función de transferencia en Z modificada.
- 2.5 Ejemplos de diseño.

Tema 3. ESTABILIDAD DE SISTEMAS DISCRETOS

- 3.1 Introducción.
- 3.2 Criterio de Jury.
- 3.3 Estabilidad en sistemas muestreados.
- 3.4 Ejemplos de diseño.

Tema 4. ANÁLISIS DINÁMICO DE SISTEMAS

- 4.1 Introducción.
- 4.2 Respuesta temporal de sistemas discretos.
- 4.3 Simplificación por polo dominante en sistemas discretos.
- 4.4 Identificación de sistemas mediante señales de prueba.
- 4.5 Ejemplos de diseño.

Tema 5. RESPUESTA TEMPORAL DE LOS SISTEMAS DE CONTROL DISCRETOS

- 5.1 Introducción.
- 5.2 Error de estado estacionario.
- 5.3 Error de estado estacionario con realimentación no unitaria.
- 5.4 N° de tipo y su influencia en los errores de estado estacionario.
- 5.5 Ejemplos de diseño.

Tema 6. LUGAR GEOMÉTRICOS DE LAS RAÍCES

- 6.1 Introducción.
- 6.2 Trazado del Lugar Geométrico de las Raíces para sistemas discretos.
- 6.3 Efectos de la adición de polos y ceros al sistema.
- 6.4 Ejemplos de diseño.

Tema 7. CRITERIO DE NYQUIST

- 7.1 Introducción.
- 7.2 Criterio de estabilidad de Nyquist para sistemas discretos.
- 7.3 Ejemplos de diseño

Tema 8. DISCRETIZACIÓN DE REGULADORES CONTINUOS

- 8.1 Introducción.
- 8.2 Discretización de reguladores continuos.
- 8.3 Efectos de la discretización sobre la estabilidad.
- 8.4 Regulador PID discretizado.
- 8.5 Ejemplos de diseño.

Tema 9. DISEÑO DE REGULADORES DISCRETOS

- 9.1 Introducción.
- 9.2 Diseño de reguladores discretos mediante el Lugar Geométrico de las Raíces.
- 9.3 Diseño por síntesis directa.
- 9.4 Diseño de reguladores en tiempo mínimo.
- 9.5 Ejemplos de diseño

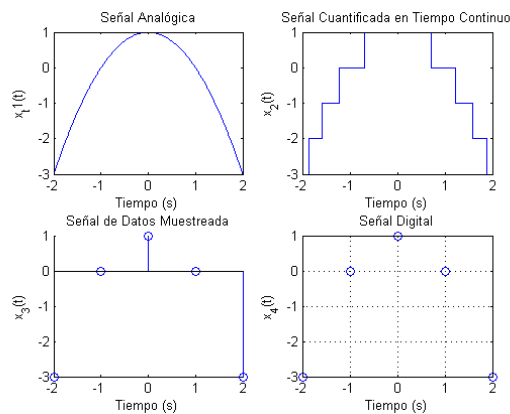
Control por Computador

Tema 1: Modelización de Sistemas Discretos

Introducción

Representación de señales en MatLab

```
>>typesOfSignals
```



Secuencias

De aquí en adelante escribiremos las secuencias como:

$$\{X_k\} = \{0, 1, -2, 3.5, \dots\}$$

$$k = 0 \rightarrow \infty$$

Nota: Trabajaremos en el rango positivo del tiempo, por tanto, todas las señales para tiempos menores que 0 valdrán 0.

Delta de Kronecker. Es la equivalente a la delta de Dirac en tiempo discreto

$$\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\} \quad \text{Si } k < 0 \text{ la secuencia valdrá } 0$$

Señal Escalón

$$\{u_k\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\} \text{ Si } k > 0 \text{ siempre vale } 1 \text{ en } k < 0 \text{ siempre } 0$$

Señal Rampa

$$\{r_k\} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{Su pendiente siempre vale } 1 \text{ independientemente de la escala de tiempo que usemos; en } k > 0$$

Sistemas Discretos

La entrada será notada como “u” y la salida será notada como “y”

Estáticos: La salida en un instante de tiempo sólo depende de la entrada en ese mismo instante de tiempo.

$$y_k = f(u_k)$$

Dinámico: La salida en un instante de tiempo puede depender de cualquier entrada o salida previa o futura

$$y_k = f(y_{k-2}, y_{k-1}, y_{k+1}, u_{k-2}, u_{k-1}, u_k, u_{k+1} \dots)$$

Trabajaremos con sistemas Dinámicos Causales y LTI.

- **Sistemas Causales:** Sistemas que no tienen variables futuras
- **Sistemas Dinámicos Causales:** Sistemas que no dependen de entradas o salidas futuras, sólo de las salidas anteriores y/o de la entrada actual y/o anteriores.
- **Sistemas LTI:** Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo.

La expresión general de este tipo de sistemas es la siguiente:

$$y_k = a_1 \cdot y_{k-1} + a_2 \cdot y_{k-2} + \dots + a_n \cdot y_{k-n} + b_0 \cdot u_k + b_1 \cdot u_{k-1} + b_2 \cdot u_{k-2} + \dots + b_m \cdot u_{k-m}$$

Nota: a y b al ser invariante en el tiempo serán constantes.

Secuencia de Ponderación: Respuesta del sistema cuando tenemos una entrada pulso.

$$\{g_k\} \rightarrow \text{Respuesta con entrada } \{\delta_k\}$$

Si analizamos la respuesta ante el pulso, tendremos la respuesta frente a cualquier entrada, ya que cualquier señal se puede discretizar en señales pulso de distintas alturas.

Para cualquier señal, aplicando el teorema de superposición, podemos calcular la salida como la sumatoria de todos los pulsos discretos que forman la señal.

$$y_k = \sum_{i=0}^k (g_{k-i} \cdot u_i)$$

$$\text{Salida} = \sum (\text{sección de ponderación} \cdot \text{entrada})$$

Ejemplo. Cálculo de la sección de ponderación y la salida de un sistema para una entrada delta.

$$\text{Ecuación del sistema: } y_k = y_{k-1} - 0.5 \cdot y_{k-2} + u_{k-2}$$

a) Secuencia de ponderación (hasta $k = 5$)

$k = 0$;

$$y_0 = y_{-1} - 0.5 \cdot y_{-2} + u_{-2} = 0$$

Nota: hemos dicho que todas las señales en instantes negativos valen 0 por tanto:

$$y_{-1} = y_{-2} = u_{-2} = y_0 = 0$$

$k = 1$

$$y_1 = y_0 - 0.5 \cdot y_{-1} + u_{-1} = 0$$

$k = 2$

$$y_2 = y_1 - 0.5 \cdot y_0 + u_0 = 1$$

Nota: u_0 al valer la señal pulso 1, $y_2 = 1$

$k = 3$

$$y_3 = y_2 - 0.5 \cdot y_1 + u_1 \rightarrow y_3 = 1$$

$k = 4$

$$y_4 = 1 - 0.5 + 1 = 0.5$$

$k = 5$

$$y_5 = 0.5 - 0.5 \cdot 1 + 0 = 0$$

La secuencia de ponderación sería entonces $\{g_k\} = \{0, 0, 1, 1, 0.5, 0, \dots\}$

b) y_k para una entrada escalón

La entrada de tipo escalón siempre vale 1 $\{u_k\} = \{1, 1, 1, \dots\}$

$$y_0 = \sum_{i=0}^0 g_{k-1} \cdot u_i = g_0 \cdot u_0 = 0 \cdot 1 = 0;$$

$$y_1 = \sum_{i=0}^1 g_{k-1} \cdot u_i = g_1 \cdot u_0 + g_0 \cdot u_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$y_2 = g_2 \cdot u_0 + g_1 \cdot u_1 + g_0 \cdot u_2 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$$

$$y_3 = g_3 \cdot u_0 + g_2 \cdot u_1 + g_1 \cdot u_2 + g_0 \cdot u_3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

$$y_4 = g_4 \cdot u_0 + g_3 \cdot u_1 + g_2 \cdot u_2 + g_1 \cdot u_3 + g_0 \cdot u_4 = 0.5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2.5$$

$$y_5 = \dots = 2.5$$

...

c) Representación en MatLab (*cc_001.m*)

En MatLab disponemos del comando **filter**, cuyos parámetros son 'B', 'A' y 'u'. MatLab pone las 'y' en un lado de la igualdad y las 'u' al otro, por eso, para adaptar nuestra fórmula, despejaremos los términos de 'y'.

$$y_k - y_{k-1} + 0.5 \cdot y_{k-2} = +u_{k-2}$$

A → coeficientes que multiplican las 'y' (Cambiamos el signo), el primer elemento es el que multiplica a y_k y por eso siempre suele ser 1

```
>>A = [1 -1 +0.5]
```

B → coeficientes que multiplican las 'u'

```
>>B = [0 0 1]
```

Creamos el vector equivalente a la señal pulso delta

```
>>delta = [1,zeros(1,5)]
```

Ejecutamos:

```
>>g = filter(B,A,delta)
```

```
>>g = 0 0 1.0000 1.0000 0.5000 0
```

Para representar la secuencia de ponderación del sistema usamos el comando **stem**

```
>>stem(g,'filled')
```

Creamos el vector equivalente a la señal escalón para el apartado b y repetimos los mismos pasos, A y B ya están calculados

```
>>u = ones(1,6)
```

```
>>y = filter(B,A,u)
```

```
>>stem(y, 'filled')
```

Probamos los mismos apartados para vectores 'delta' y 'u' de 30 y 31 componentes. Vemos que ambas entradas son muy parecidas aunque con valores diferentes, ambas oscilan alrededor de un valor hasta que se estabilizan en ese valor.

Ejemplo. Simular la secuencia $y_k = -3y_{k-1} - 2y_{k-2} + u_k$, hasta $k = 10$ (11 elementos porque MatLab empieza en 1), para una entrada impulsiva delta y una señal escalón. (*cc_002.m*)

En este caso:

```
>>A = [1,3,2]
>>B = [1,0,0]
>>delta = [1, zeros(1,10)]
>>u = ones(1,11)
```

Vemos que la suma es más grande cuanto más tiempo, esto indica que el sistema es inestable, para que sea estable, debe tender a un valor 0, como en el caso anterior.

Sistema de Control Realimentado

Estabilidad de un sistema

Lo fundamental en un sistema es que sea estable.

Un sistema es estable, si para una secuencia de entrada acotada, la secuencia de salida está también acotada.

Cumple la condición de estabilidad si la suma de la secuencia de ponderación es una secuencia finita:

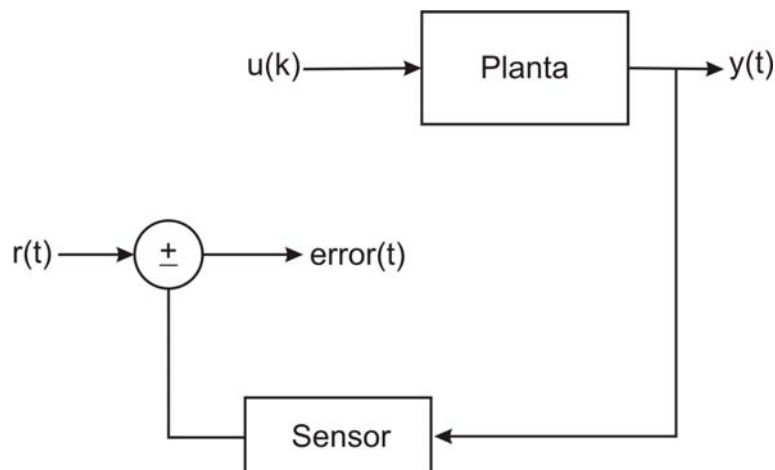
$$\sum_{i=0}^{\infty} (|g_i|) < \infty$$

Si conocemos la Planta de un sistema, podemos saber para que entrada la salida es la deseada. El problema es que si hay un error, se va acumulando hasta poder hacer el sistema inestable, este tipo de control se llama control en lazo abierto (nunca lo haremos).



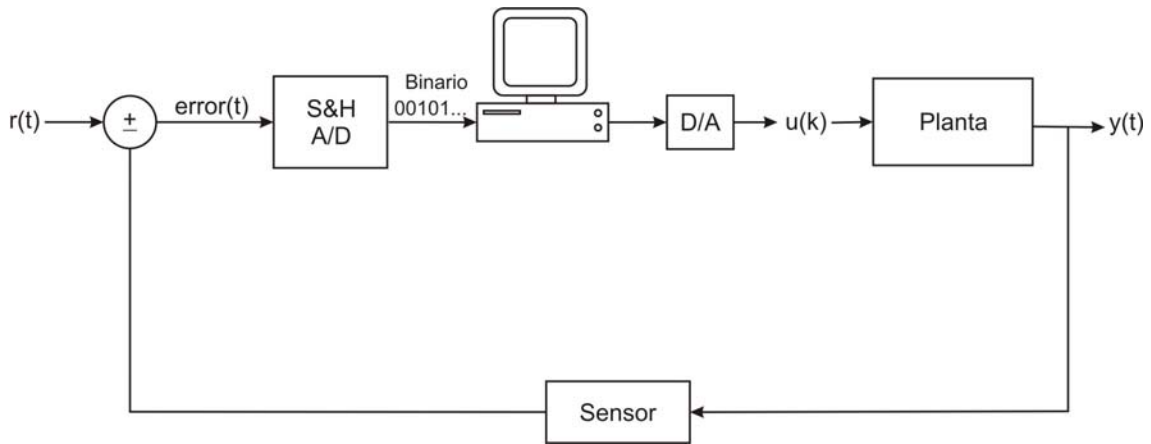
Lo que haremos será comparar la salida del sistema, con la que nosotros queremos $r(t)$ (señal de referencia), si a ésta señal le restamos la salida obtenemos el error. Si hacemos que este error tienda a cero tendremos la salida deseada, para ello en función del error iremos cambiando la planta para obtener, aproximadamente, la salida deseada.

Al ser la salida una medida física, necesitamos un sensor que la transforme en una magnitud eléctrica para poder compararla.



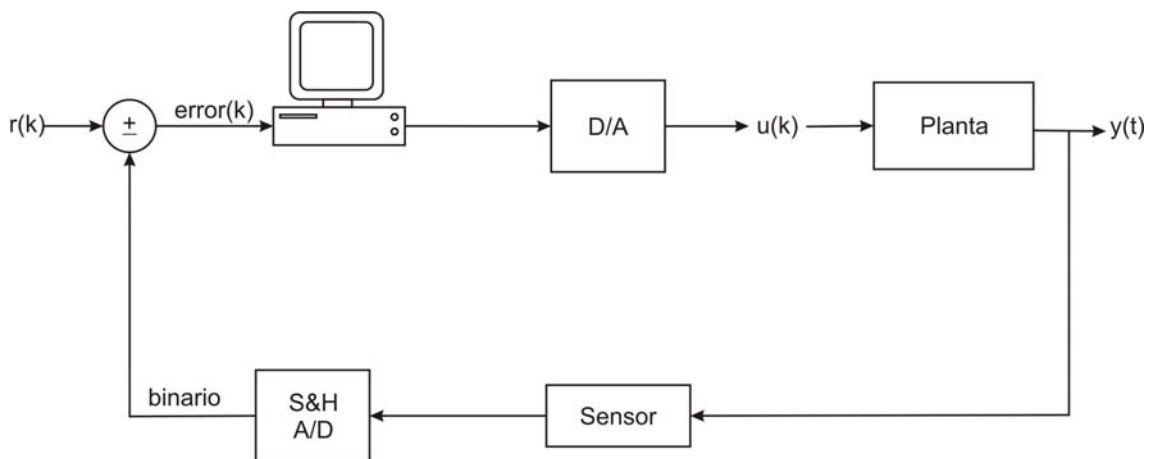
Tanto la referencia, el error, como la salida, son magnitudes temporales.

Usaremos un computador para que partiendo del error calcule la entrada de la planta para que la salida sea la que queremos, como el error es analógico, es necesario un Sample and Hold y un CAD para la entrada del computador. Tendremos una entrada y salida del computador binaria y usaremos un mantenedor y un CDA para que la entrada a la Planta del sistema sea analógica. El mantenedor es necesario para que la salida del CDA no sean puntos discretos, de manera que mantenga la señal a un valor hasta que el computador cambie el valor.



Este sistema discreto, ya no sería de lazo abierto sino de Lazo cerrado, no sería el único esquema.

Otro posible esquema: Si el sensor posee salida digital...



Definiciones

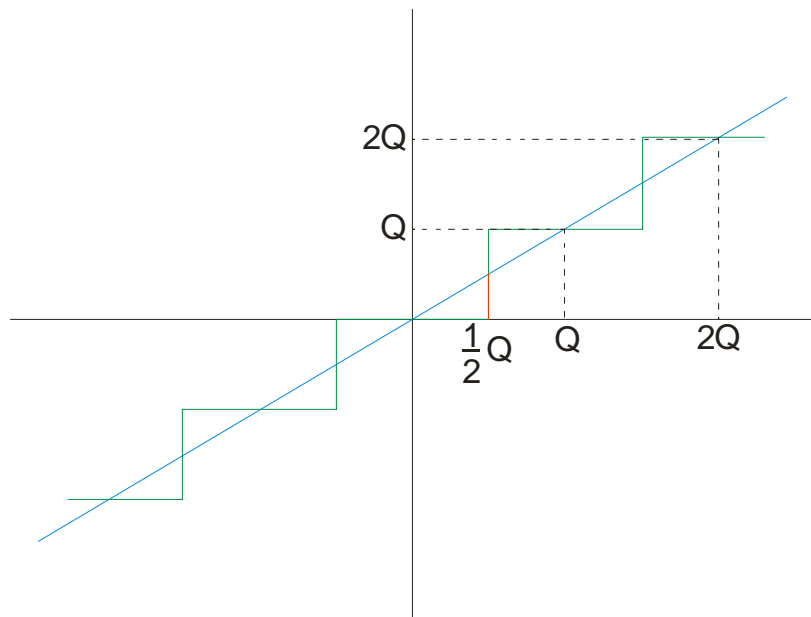
Nivel de Cuantificación (Q): se define como el nivel que hay entre dos puntos adyacentes de la curva de cuantificación, y se define como el intervalo de escala completa (FSR) partido por 2 elevado al número de bits (n).

$$Q = \frac{FSR}{2^n}$$

Dependiendo de cuanto tenemos que representar y de cuantos bits tengamos para ello, el cambio de un valor a otro será mayor o menor.

Error de cuantificación: Error que cometemos al pasar de una señal de infinitos valores a una señal que posee valores discretos finitos. Variará desde 0 hasta $\frac{1}{2} \cdot Q$

Dependerá del valor que estemos cuantificando, por la escala x introducimos el valor analógico y el factor de escala devuelve el valor digital, si estamos en un valor de $\frac{1}{2} \cdot Q$ estamos devolviendo 0, por tanto el error será $\frac{1}{2} \cdot Q$



El error lo trataremos como un ruido llamado ruido de cuantificación, si el número de bits es suficiente este ruido no será significativo

Transformada Z (unilateral)

Esto quiere decir que nuestras señales tendrán valor desde cero en adelante, hacia atrás valdrán 0. Por lo general serán continuas. Si por cualquier motivo, la señal fuera discontinua, tendría que serlo en el 0, en este caso tomaremos el valor a la derecha del 0. Delta no la consideraremos discontinua.

Definición

La transformada Z de una señal x_k siempre que $x_k = 0$ para $k < 0$, es una serie de potencias en z^{-k} con coeficientes x_k y que se expresa con $X(z)$.

$$X(z) = Z\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k} ;$$

Nota: z pertenece a los números complejos, $z = a + bj$.

Desarrollando la serie:

$$X(z) = x(0) + x(1) \cdot z^{-1} + x(2) \cdot z^{-2} + x(3) \cdot z^{-3} + \dots$$

Ventajas de usar la transformada Z. Se usa una expresión sencilla, usaremos una tabla de transformadas, lo que haremos será convertir una ecuación en diferencias en una expresión algebraica que será más fácil de usar.

Propiedades de la transformada Z

- Multiplicación por una constante

$$Z\{a \cdot x(k)\} = a \cdot x(z)$$

- Linealidad

$$Z\{a \cdot x(k) + b \cdot y(k)\} = a \cdot x(z) + b \cdot y(z)$$

- Translación en el tiempo

$$Z\{x(t-n \cdot T)\} = Z^{-n} \cdot x(z);$$

Nota: T es el tiempo de muestreo \rightarrow translación a la derecha, (7) y (9) de la tabla de propiedades de la transformada.

$$Z\{x(t+n \cdot T)\} = Z^n \cdot x(z) - \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot Z^{n-i}$$

Nota: \rightarrow translación a la izquierda, (6) y (8) de la tabla.

Teorema del valor inicial

Nos permite conocer el primer elemento de una secuencia sin conocer la ecuación diferencial. Generalmente lo sabremos y no será necesario calcularlo.

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Teorema del valor final

Permite calcular el último valor de una secuencia cuando k tiende a infinito.

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \cdot X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z)$$

Ejemplo. Calcular el valor final de la expresión: $x(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} \cdot z^{-1}} \rightarrow x(\infty)?$

$$x(\infty) = (1 - z^{-1}) / 1 - e^{-aT} \cdot z^{-1} = 0 / 1 - e^{-aT} = 0$$

Ejercicio. Calcular la transformada Z de la expresión:

$$y(k) - 0.7 \cdot y(k-1) + 0.1 \cdot y(k-2) = 0.8 \cdot u(k-2)$$

$$Z\{y(k)\} = Y(z)$$

$$Z\{-0.7 \cdot y(k-1)\} = -0.7 \cdot Z^{-1} \cdot Y(z)$$

$$Z\{0.1 \cdot y(k-2)\} = 0.1 \cdot Z^{-2} \cdot Y(z)$$

$$Z\{0.8 \cdot u(k-2)\} = 0.8 \cdot Z^{-2} \cdot U(z)$$

Transformada Z de la expresión:

$$Y(z) - 0.7 \cdot Z^{-1} \cdot Y(z) + 0.1 \cdot Z^{-2} \cdot Y(z) = 0.8 \cdot Z^{-2} \cdot U(z)$$

Sacamos factor común:

$$Y(z) (1 - 0.7 \cdot z^{-1} + 0.1 \cdot z^{-2}) = 0.8 \cdot Z^{-2} \cdot U(z)$$

$$Y(z) = 0.8 \cdot Z^{-2} / (1 - 0.7 \cdot z^{-1} + 0.1 \cdot z^{-2}) \cdot U(z)$$

Podemos saber la salida del sistema a cualquier señal, por ejemplo para la delta de kronecker:

$$u(k) = \text{delta}(k) \rightarrow U(z) = 1$$

Para una señal escalón:

$$u(k) = \{1, 1, 1, 1, 1, \dots\} \rightarrow U(z) = 1 / 1 - z^{-1} = z / (z - 1)$$

Para obtener de nuevo y(k) sería necesario hacer la transformada inversa de la expresión.

Función de Transferencia de un Sistema Discreto

Sería un “modelo del sistema”, para el ejemplo anterior:

$$Y(z) / U(z) = 0.8 \cdot Z^{-2} / (1 - 0.7 \cdot z^{-1} + 0.1 \cdot z^{-2})$$

Esta ecuación es lo que vamos a llamar función de transferencia: Transformada Z de la salida, dividida por la Transformada Z de la entrada siempre que las condiciones iniciales sean 0. También se puede definir como la salida del sistema para una entrada delta.

$$Z\{\text{secuencia de ponderación 'f(k)'}\}$$

Veremos a continuación como sería para el caso general:

$$y(k) = a_1 \cdot y_{k-1} + a_2 \cdot y_{k-2} + \dots + a_n \cdot y_{k-n} + b_0 \cdot u_k + b_1 \cdot u_{k-1} + b_2 \cdot u_{k-2} + \dots + b_m \cdot u_{k-m}$$

La expresión general de una función de transferencia será entonces:

$$Y(z) \cdot (1 - a_1 \cdot z^{-1} - a_2 \cdot z^{-2} - a_3 \cdot z^{-3} - \dots - a_n \cdot z^{-n}) = U(z) (b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + b_3 \cdot z^{-3} + \dots + b_m \cdot z^{-m})$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + b_3 \cdot z^{-3} + \dots + b_m \cdot z^{-m}}{1 - a_1 \cdot z^{-1} - a_2 \cdot z^{-2} - a_3 \cdot z^{-3} - \dots - a_n \cdot z^{-n}}$$

Si multiplicamos y dividimos por Z^n nos quedarían las Z con exponentes positivos

$$G(z) = \frac{b_0 \cdot z^n + b_1 \cdot z^{n-1} + b_2 \cdot z^{n-2} + b_3 \cdot z^{n-3} + \dots + b_m \cdot z^{n-m}}{1 \cdot z^n - a_1 \cdot z^{n-1} - a_2 \cdot z^{n-2} - a_3 \cdot z^{n-3} - \dots - a_n}$$

Si calculamos los valores que hacen cero el denominador de la ecuación habremos calculado los Ceros, si calculamos los que hacen cero el numerador serán los Polos, estos valores nos servirán para calcular la estabilidad del sistema. Si los polos son mayores que uno, el sistema será inestable.

Veremos como se define una función de transferencia en MatLab: (*cc_003.m*)

$$G = \text{tf}(\text{num}, \text{den}, T)$$

num: vector de coeficientes del numerador

den: vector de coeficientes del denominador

T: periodo de muestreo, si indicamos *-1* quiere decir que no tenemos definido el periodo de muestreo

$$G = \text{zpk}(\text{ceros}, \text{polos}, \text{ganancia}, T)$$

ceros: vector con los ceros de la función de transferencia

polos: vector con los polos

ganancia: es un valor que multiplica a la función de transferencia

Además podemos pasar de una forma a otra:

$$G = \text{zpk}(\text{tf}(\dots))$$

$$G = \text{tf}(\text{zpk}(\dots))$$

Comandos para simular en forma de función de transferencia:

impulse → simula el sistema para una entrada impulso

step → simula para una entrada escalón.

lsim → simula para una entrada genérica.

inicial → simula para una condición inicial distinta de cero y para ninguna entrada.

Simularemos la secuencia calculada anteriormente para una entrada impulso y una entrada **step**

$$Y(z) = 0.8 \cdot z^{-2} / (1 - 0.7 \cdot z^{-1} + 0.1 \cdot z^{-2})$$

Primero es necesario pasar a exponentes positivos, multiplicando y dividiendo por el mayor exponente:

$$G(z) = 0.8 / (z^2 - 0.7 \cdot z + 0.1)$$

```
>> G = tf(0.8, [1 -0.7 0.1], -1)
```

Si usamos **zpk** la función se muestra en forma de factores, para saber los ceros y polos existen las funciones:

```
>> zero(G)
```

```
>> pole(G)
```

Transformada Z inversa

Veremos como pasar del dominio de Z al dominio del tiempo nuevamente.

Existen cuatro procedimientos:

- Aplicando las tablas (Sólo nos sirve para expresiones sencillas, si son complejas las transformamos en sencillas)
- División larga: Una vez que tenemos los cocientes, realizamos la división de los polinomios, es un proceso tedioso que puede dar lugar a expresiones extrañas...
- Integral de Curvatura: Integral compleja, muy complicada de realizar
- Fracciones Simples: Transformamos el cociente de polinomio en fracciones de coeficientes más pequeños a los que poder aplicar las transformaciones directas de las tablas. Buscaremos hacer las fracciones simples de $Y(z) / z$, una vez calculada pasamos la z multiplicando. Teniendo fracciones simples pueden aparecer cuatro casos:
 - o Raíces reales distintas
 - o Raíces reales iguales: Tienen alguna multiplicidad
 - o Raíces complejas distintas
 - o Raíces complejas iguales: Son sistemas de orden 4, nosotros trabajaremos con sistemas de orden 2

Usaremos el método de los Residuos para resolverlas

En MatLab contamos con el comando ***residue***

Veremos unos ejemplos de cada caso:

Ejemplo 1. En la siguiente ecuación en diferencia calcular $y(k)$

$$y(k+1) - a \cdot y(k) = r(k)$$

$$y(0) = r(0) = 0$$

Los pasos a seguir son: $Z\{\text{secuencia}\} \rightarrow \text{despejamos } Y(z) \rightarrow Z^{-1}\{Y(z)\}$

$$Y(z) \cdot z - a \cdot Y(z) = R(z) \cdot z - a \cdot r(0)$$

Como tenemos que $y(0)$ y $r(0)$ son cero, nos queda:

$$Y(z) \cdot z - a \cdot Y(z) = R(z) \cdot z$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-a} \cdot R(z)$$

Suponemos que la entrada es una delta, tenemos: $r(k) = \delta(k) \rightarrow R(z) = 1$

$$Y(z) = z / (z-a) \rightarrow y(k) = a^k$$

Aplicamos las tablas para realizar la transformada inversa, en este caso en la fila (18)

Ejemplo 2. (Hecho anteriormente): ¿ $y(k)$?

$$G(z) = Y(z) / U(z) = 0.8 \cdot z^{-2} / (1 - 0.7 \cdot z^{-1} + 0.1 \cdot z^{-2})$$

Veremos la salida cuando la entrada es una señal escalón $U(z) = 1 / 1 - z^{-1}$

Hallamos $Y(z) = G(z) \cdot U(z) \rightarrow z^{-1}\{\dots\} \rightarrow y(k)$

$$Y(z) = \frac{0.8 \cdot z^{-2}}{(1 - 0.7 \cdot z^{-1} + 0.1 \cdot z^{-2})} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{0.8 \cdot z^{-2}}{1 - 0.7 \cdot z^{-1} + 0.1 \cdot z^{-2} - z^{-1} + 0.7 \cdot z^{-2} - 0.1 \cdot z^{-3}}$$

Simplificando en el denominador:

$$Y(z) = \frac{0.8 \cdot z^{-2}}{1 - 1.7 \cdot z^{-1} + 0.8 \cdot z^{-2} - 0.1 \cdot z^{-3}} \rightarrow \text{pasando a exponentes positivos,}$$

multiplicando y dividiendo por z^3 obtenemos:

$$Y(z) = \frac{0.8 \cdot z}{1 \cdot z^3 - 1.7 \cdot z^2 + 0.8 \cdot z - 0.1}$$

En MatLab podemos resolver las raíces de un polinomio mediante el comando `roots` (`cc_004.m`)

```
>>roots([1, -1.7, 0.8, -0.1])
```

Obtenemos que son 1, 0.5 y 0.2

Cálculo de los Residuos para Raíces Reales

En este apartado veremos la forma de calcular los residuos para polos reales simples y múltiples.

- Raíces Reales Simples (multiplicidad 1):

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B_1}{z - p_1} + \frac{B_2}{z - p_2} + \frac{B_3}{z - p_3} + \dots$$

$p_1 \neq p_2 \neq p_3 \dots$ Son las raíces del polinomio

$A(z) = 0 \rightarrow p_1, p_2, \dots$ serán los polos

Para calcular cada B_i haremos:

$$B_i = \left(\frac{B(z)}{A(z)} \cdot (z - p_i) \right) \Bigg|_{z=p_i}$$

- Raíces Reales Múltiples (multiplicidad > 1)

Cuando las raíces son reales (hay polos repetidos), la expresión a usar es la siguiente:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B_1}{(z - p_1)^n} + \frac{B_2}{(z - p_1)^{n-1}} + \dots + \frac{B_n}{(z - p_1)^1}$$

Para calcular los B_i en este caso se procede de la siguiente forma:

$$B_i = \left(\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} \left[(z - p_1)^n \cdot \frac{B(z)}{A(z)} \right] \cdot \frac{1}{(i-1)!} \right) \Bigg|_{z=p_1}$$

En MatLab tenemos un comando que nos calcula los B_i :

$$[R,P,k] = \text{residue}(B,A)$$

B y **A** son las funciones

R son los residuos

P son los polos

k: si B se puede dividir por A, MatLab lo calcula y lo devuelve en k

A continuación haremos un ejemplo de cada tipo y lo comprobaremos en MatLab, además aprovecharemos el ejemplo del día anterior para calcular la transformada Z inversa.

Ejemplo 1. Evaluar el sistema $Y(z) = \frac{0.8 \cdot z^{-2}}{1 - 0.7 \cdot z^{-1} + 0.1 \cdot z^{-2}} \cdot U(z)$ para:

a) Una entrada pulso $\rightarrow u(k) = \delta(k) \rightarrow U(z) = 1$

A partir de $Y(z)$ vamos a calcular la transformada inversa.

Primero pasaremos los exponentes a positivos:

$$Y(z) = \frac{0.8}{z^2 - 0.7 \cdot z + 0.1}$$

Para realizar la transformada inversa es necesario descomponer la expresión en funciones simples. Para descomponer en raíces es necesario tener 'z' en el denominador; como no lo tenemos, dividimos por z en ambos términos:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{0.8}{(z^2 - 0.7 \cdot z + 0.1) \cdot z}$$

Para calcular las raíces del polinomio del denominador lo haremos mediante MatLab:

```
>>roots([1, -0.7,0.1])
```

Obtenemos $p2 = 0.1$ y $p3 = 0.5$, $p1$ sería la raíz de la 'z' que multiplica el denominador, es decir $p1 = 0$;

Tenemos entonces que el cociente del polinomio es:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{0.8}{(z^2 - 0.7 \cdot z + 0.1) \cdot z} = \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{(z - 0.2)} + \frac{B_3}{(z - 0.5)}$$

$$B_1 = \frac{0.8}{z \cdot (z - 0.2) \cdot (z - 0.5)} \cdot (z - p1) \Big|_{z=p1=0} = \frac{0.8}{z \cdot (z - 0.2) \cdot (z - 0.5)} \cdot z = \frac{0.8}{(-0.2) \cdot (-0.5)} = 8$$

Como z en $p1$ es igual a 0, $B1$ nos queda $0.8 / (-0.2) \cdot (-0.5) = 8$. El $(z - 0)$ que multiplica el cociente se elimina con la z del denominador, por eso el denominador no es 0

Realizamos los mismos pasos para calcular $B2$ y $B3$:

$$B_2 = \frac{0.8}{z \cdot (z - 0.2) \cdot (z - 0.5)} \cdot (z - p2) \Big|_{z=p2=0.2} = \frac{0.8}{z \cdot (z + 0.2) \cdot (z - 0.5)} \cdot (z + 0.2) = \frac{0.8}{(0.2) \cdot (0.2 - 0.5)} = -13.3$$

$$B_3 = \frac{0.8}{z \cdot (z - 0.2) \cdot (z - 0.5)} \cdot (z - p3) \Big|_{z=p3=0.5} = \frac{0.8}{z \cdot (z - 0.2) \cdot (z + 0.5)} \cdot (z + 0.5) = \frac{0.8}{(0.5) \cdot (0.5 - 0.2)} = 53.3$$

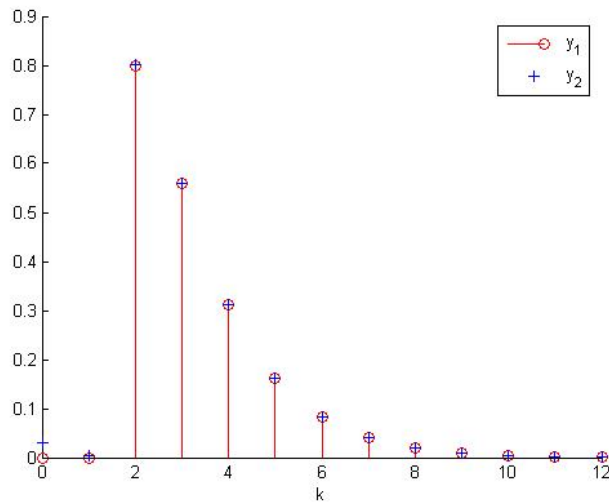
Ahora sustituyendo en la ecuación:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{8}{z} + \frac{-13.3}{(z - 0.2)} + \frac{5.33}{(z - 0.5)} \quad \rightarrow \quad Y(z) = 8 + \frac{-13.3 \cdot z}{(z - 0.2)} + \frac{5.33 \cdot z}{(z - 0.5)}$$

Ahora, mediante la tabla (líneas 1 y 18) calculamos la transformada inversa de cada una de las expresiones, quedando la expresión dependiendo sólo y exclusivamente del tiempo (k):

$$y(k) = 8 \cdot \delta(k) - 13.3 \cdot 0.2^k + 5.33 \cdot 0.5^k$$

Si usamos impulse para representar la función $Y(z)$ y luego representamos esta función dándole valores a k , debemos obtener la misma gráfica (cc_005.m)



Siendo:

$$Y_1 \rightarrow Y(z) = \frac{0.8}{z^2 - 0.7 \cdot z + 0.1} \cdot U(z)$$

$$Y_2 \rightarrow y(k) = 8 \cdot \delta(k) - 13.3 \cdot 0.2^k + 5.33 \cdot 0.5^k$$

Si hacemos este mismo ejercicio en MatLab obtendremos: (cc_005.m)

```
>> [R,P,K] = residue(0.8,[1 -0.7 0.1 0])
```

R =

5.3333

-13.3333

8.0000

P =

0.5000

0.2000

0

K =

[]

b) Una entrada escalón $\rightarrow u(k) = \{1,1,1,1,1,\dots\} \rightarrow U(z) = \frac{z}{z-1}$

Como ya se calculó el día anterior:

$$Y(z) = \frac{0.8 \cdot z^{-2}}{1 - 1.7 \cdot z^{-1} + 0.8 \cdot z^{-2} - 0.1 \cdot z^{-3}}$$

Al igual que antes, pasamos todos los exponentes a positivos multiplicando y dividiendo por el mayor exponente z^3 :

$$Y(z) = \frac{0.8 \cdot z}{z^3 - 1.7 \cdot z^2 + 0.8 \cdot z - 0.1}$$

Dividimos en los dos términos por z

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{0.8}{z^3 - 1.7 \cdot z^2 + 0.8 \cdot z - 0.1}$$

Primero lo calcularemos en MatLab:

```
>>[R,P,K] = residue(0.8,[1 -1.7 0.8 -0.1])
```

```
R =
    2.0000
   -5.3333
    3.3333
P =
    1.0000
    0.5000
    0.2000
```

Tenemos en este caso que el valor para el numerador de los distintos polos está en R, será 2 para el polo 1, -5.33 para el 0.5 y 3.333 para el 0.2.

Vemos que estamos en el caso de raíces reales y simples ya que son todas distintas, la descomposición del polinomio nos queda en este caso:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{0.8}{z^3 - 1.7 \cdot z^2 + 0.8 \cdot z - 0.1} = \frac{2}{(z-1)} - \frac{5.33}{(z-0.5)} + \frac{3.33}{(z-0.2)}$$

Para hacerlo manualmente debemos calcular las raíces, si es de orden 3 podemos calcular las raíces en MatLab o se nos darán, no será necesario calcularlas en ningún caso:

```
>>roots([1 -1.7 0.8 -0.1])
```

Como era de esperar obtenemos 1, 0.5 y 0.2.

Calculamos B_1 , B_2 y B_3 de la misma forma que antes:

$$B_1 = \frac{0.8}{(z-1) \cdot (z-0.5) \cdot (z-0.2)} \cdot (z-p_1) \Big|_{z=p_1=1} = \frac{0.8}{(z+1) \cdot (z-0.5) \cdot (z-0.2)} \cdot (z+1) = 2$$

$$B_2 \Big|_{z=p_2=0.5} = -5.33$$

$$B_3 \Big|_{z=p_3=0.2} = 3.33$$

A continuación calcularemos la transformada Z inversa.

Primero multiplicamos toda la expresión por la z que divide a $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{2 \cdot z}{(z-1)} - \frac{5.33 \cdot z}{(z-0.5)} + \frac{3.33 \cdot z}{(z-0.2)}$$

La expresión es similar a la anterior, por tanto, usando la tabla obtenemos:

$$y(k) = 2 \cdot 1^k - 5.33 \cdot 0.5^k + 3.33 \cdot 0.2^k$$

$$1^k = 1$$

$$y(k) = 2 - 5.33 \cdot 0.5^k + 3.33 \cdot 0.2^k$$

A continuación realizaremos un ejemplo con raíces reales múltiples

Ejemplo 2. Evaluar el sistema $\frac{Y(z)}{z} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{z^2 + 2 \cdot z + 3}{(z + 1)^3}$ para:

Tenemos un único polo en -1 tres veces (multiplicidad 3), en este caso el procedimiento será ligeramente distinto a los anteriores:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{z^2 + 2 \cdot z + 3}{(z + 1)^3} = \frac{B_1}{(z + 1)^3} + \frac{B_2}{(z + 1)^2} + \frac{B_3}{(z + 1)}$$

En este caso para calcular cada B_i , atenderemos a la respectiva fórmula:

$$B_1 = \left(\frac{d^0}{dz^0} \left[\frac{B(z)}{A(z)} \cdot (z - p_1)^n \right] \cdot \frac{1}{0!} \right) \Bigg|_{z=p_1=-1} = \frac{z^2 + 2 \cdot z + 3}{(z + 1)^3} \cdot (z + 1)^3 \Bigg|_{z=p_1=-1} = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = 2$$

En este caso la derivada 0 de $B(z) / A(z)$ sería el propio cociente, esto quiere decir que no hay que derivar. Por otro lado el factorial sería igual a 1

Para calcular B_2 tenemos que calcular la derivada con respecto a z de lo que teníamos antes, como $(z+1)^3$ se eliminó en el denominador y numerador, la derivada es del polinomio $z^2 + 2 \cdot z + 3$, con lo que nos queda $2 \cdot z + 2$, quedando la expresión:

$$B_2 = (2 \cdot z + 2) \cdot \frac{1}{(2-1)!} \Bigg|_{z=p_1=-1} = 2 \cdot (-1) + 2 = 0$$

El factorial en este caso también vale 1

Para calcular B_3 volvemos a calcular la derivada de lo que teníamos antes $2 \cdot z + 2 = 2$ quedando

$$B_3 = 2 \cdot \frac{1}{(3-1)!} \Bigg|_{z=p_1=-1} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

En este último caso el factorial de 2 es 2

Por último, al igual que antes, despejamos la expresión $Y(z)$ y realizamos la transformada inversa.

$$Y(z) = \frac{2 \cdot z}{(z+1)^3} + \frac{z}{(z+1)}$$

En la fila 27 de la tabla obtenemos la transformada del primer término, quedando entonces como:

$$\text{Fila 27: } Z \left\{ \frac{k \cdot (k-1)}{2!} \cdot a^{k-1} \right\} = \frac{z^{-2}}{(1-a \cdot z^{-1})^3} \text{ pasando } z \text{ a positivo} = \frac{z}{(z-a)^3}$$

En la fila 28 se muestra el caso general

Realizamos las transformadas inversas de los dos términos de la ecuación de $Y(z)$

$$1.- Z \left\{ \frac{2 \cdot z}{(z+1)^3} \right\} = 2 \cdot Z \left\{ \frac{z}{(z+1)^3} \right\} = 2 \cdot \frac{k(k-1)}{2} \cdot (-1)^{k-1} = k \cdot (k-1) \cdot (-1)^{k-1}$$

$$2.- Z \left\{ \frac{z}{(z+1)} \right\} = (-1)^k$$

La expresión final que nos queda es la siguiente:

$$y(k) = k \cdot (k-1) \cdot (-1)^{k-1} - 1^k$$

Se puede simplificar aún más teniendo en cuenta que:

$$(-1)^{k-1} = (-1)^k \cdot (-1)^{-1} = (-1) \cdot (-1)^k$$

Nota: $(-1)^{-1} = \frac{1}{-1^1} = -1$

Quedando entonces la expresión como:

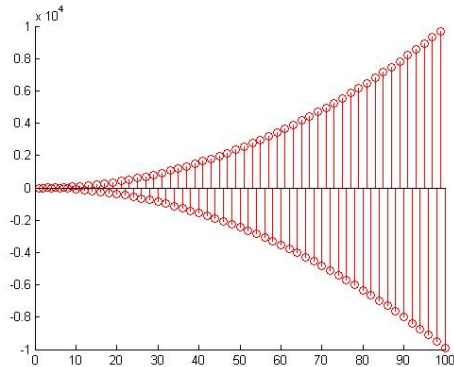
$$y(k) = (-1)^k + k \cdot (k-1) \cdot (-1) \cdot (-1)^k = (-1)^k \cdot (1 - k \cdot (k-1))$$

Para probar esto en MatLab usaremos: (cc_006.m)

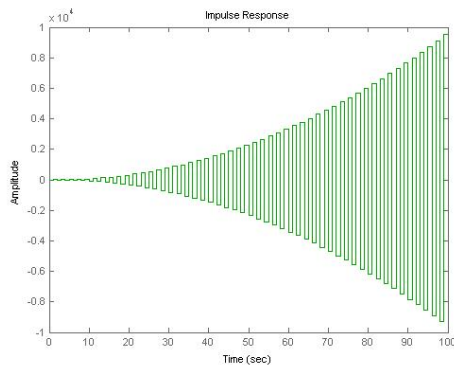
- *impulse*
- *step*

Representamos la expresión $y(k)$ y la Función de Transferencia $\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2 + 2 \cdot z + 3}{(z+1)^3}$ para una entrada delta y una entrada escalón dándonos los mismos resultados:

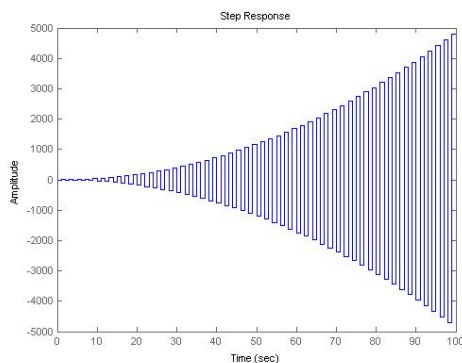
- $y(k) = (-1)^k \cdot (1-k(k-1))$



- *Función de Transferencia para una entrada impulso*



- *Función de Transferencia para una entrada escalón*



Cálculo de los Residuos para Raíces Complejas Simples

Aquí calcularemos los residuos con polos complejos simples (los polos complejos múltiples dada su dificultad no los estudiaremos), para luego poder calcular la Transformada Z inversa.

Los métodos a usar son:

1. Utilizar el método de los residuos para polos reales (MatLab: *residue*). Se obtienen **residuos complejos** (no aparecen en las tablas), una vez obtenidos estos residuos será necesario operar para quitar los números complejos y poder realizar la transformada inversa.
2. Buscar Fracciones Simples de la forma: $\frac{a \cdot z + b}{(z - \delta^2) + \omega^2}$; donde los polos serían " $\delta \pm j\omega$ ". También será necesario realizar algunas operaciones. Luego podremos resolverlas comparando con las expresiones de las tablas (dos últimas filas de la tabla "no ogata", ó 16 y 17 de la tabla "ogata")

$$(1) Z^{-1} \left\{ \frac{z \cdot (z - c \cdot \cos(b \cdot T))}{z^2 - 2 \cdot c \cdot z \cdot \cos(b \cdot T) + c^2} \right\} = c^k \cdot \cos(b \cdot k \cdot T)$$

$$(2) Z^{-1} \left\{ \frac{z \cdot c \cdot \text{sen}(b \cdot T)}{z^2 - 2 \cdot c \cdot z \cdot \cos(b \cdot T) + c^2} \right\} = c^k \cdot \text{sen}(b \cdot k \cdot T)$$

A continuación evaluaremos un sistema con este segundo método para su mejor comprensión:

Ejemplo 1. Calcular la transformada Z inversa de $\frac{Y(z)}{z} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{2 \cdot z + 12}{z^2 + 2 \cdot z + 5}$

Dada esta expresión vamos a ir calculando los pasos necesarios para transformar esta expresión en fracciones complejas simples del tipo: $\frac{a \cdot z + b}{(z - \delta^2) + \omega^2}$

Para ver si es viable realizarlo por el método 1, obtenemos las raíces del denominador, podríamos hacerlo a mano, pero ejecutaremos mejor el comando en MatLab, para ver si realizarlo:

```
>>roots([1 2 5])
ans =
    -1.0000 + 2.0000i
    -1.0000 - 2.0000i
```

Se obtiene un resultado complejo, para ello, obstamos mejor hacerlo por el segundo método. Por lo que comparamos la expresión del denominador de nuestra expresión con el denominador de la primera de las expresiones a comparar:

$$z^2 + 2 \cdot z + 5 = z^2 - 2 \cdot c \cdot z \cdot \cos(b \cdot t) + c^2$$

Comparamos lo que multiplica a la z^2 en ambos lados de la igualdad, lo mismo con la z y con el término independiente:

$$2 = 2 \cdot \cos(b \cdot t) \rightarrow \cos(b \cdot t) = \frac{-1}{c} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$5 = c^2 \rightarrow c = \sqrt{5}$$

Despejando bT obtenemos:

$$b \cdot T = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = 2.0344 \text{ rad}$$

Nota: En MatLab el arcoseno se obtiene con el comando `acos()` \rightarrow `acos(-1(sqrt(5)))`

Por otro lado, tenemos la siguiente propiedad: $\text{sen}^2(bT) + \text{cos}^2(bT) = 1$, de donde podemos despejar $\text{sen}(bT)$ para hallar su valor.

$$\text{sen}(bT) = \sqrt{1 - \text{cos}^2(bT)} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Ya tenemos lo necesario para comparar la expresión del principio con las de las tablas descritas anteriormente:

$$c = \sqrt{5}$$

$$bT = 2.0344\text{rad}$$

$$\text{cos}(bT) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{sen}(bT) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Como siempre, pasamos la z del denominador de Y al otro lado de la igualdad

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2 \cdot z + 12}{z^2 + 2 \cdot z + 5} \rightarrow Y(z) = \frac{2 \cdot z^2 + 12 \cdot z}{z^2 + 2 \cdot z + 5}$$

Buscaremos una combinación de las expresiones anteriores. Generalmente será una suma de ambas.

$$Z^{-1} \left\{ \frac{z \cdot (z - c \cdot \text{cos}(b \cdot T))}{z^2 - 2 \cdot c \cdot z \cdot \text{cos}(b \cdot T) + c^2} \right\} \quad Z^{-1} \left\{ \frac{z \cdot c \cdot \text{sen}(b \cdot T)}{z^2 - 2 \cdot c \cdot z \cdot \text{cos}(b \cdot T) + c^2} \right\}$$

De las expresiones a comparar elegiremos, primero escogemos la de mayor orden, y en una primera instancia el denominador:

$$z^2 - z \cdot c \cdot \text{cos}(bT) = z^2 - z \cdot \sqrt{5} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{5}} \right) = z^2 + z$$

Ahora operaremos en la expresión de $Y(z)$ para que el numerador valga la expresión obtenida:

Quitamos el 2 que multiplica a la z^2 y dejamos un z sola, dejando z y por otro lado $5z$

$$Y(z) = \frac{2 \cdot (z^2 + 6 \cdot z)}{z^2 + 2 \cdot z + 5} = 2 \cdot \frac{(z^2 + z + 5 \cdot z)}{z^2 + 2 \cdot z + 5}$$

Dividimos la expresión en dos sumandos, una comparable con la expresión (1) de la tabla y la segunda expresión la transformaremos para que coincida con la expresión (2) de la tabla

Separando la expresión en sumando obtenemos:

$$Y(z) = 2 \cdot \frac{(z^2 + z)}{z^2 + 2 \cdot z + 5} + 2 \cdot \frac{5 \cdot z}{z^2 + 2 \cdot z + 5}$$

Se ve claramente que el primer sumando coincide con la expresión (1) de la Z^1 , por tanto, podemos calcular su transformada inversa de manera directa:

$$Z^{-1} \left\{ 2 \cdot \frac{(z^2 + z)}{z^2 + 2 \cdot z + 5} \right\} = 2 \cdot \sqrt{5}^k \cdot \cos(2.0344 \cdot k)$$

Ahora calcularemos la transformada inversa del otro sumando de la ecuación anterior:

$$Z^{-1} \left\{ 2 \cdot \frac{5 \cdot z}{z^2 + 2 \cdot z + 5} \right\}$$

Para ello, al igual que antes, vemos cuanto tiene que valer cada término del numerador de la expresión (2) para que la expresión sea la que buscamos:

$$c \cdot z \cdot \text{sen}(bT) = \sqrt{5} \cdot z \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 2 \cdot z$$

sustituyendo en la expresión anterior tenemos:

$$Z^{-1} \left\{ \frac{10 \cdot z}{z^2 + 2 \cdot z + 5} \right\} = 5 \cdot Z^{-1} \left\{ \frac{2 \cdot z}{z^2 + 2 \cdot z + 5} \right\} = 5 \cdot \sqrt{5}^k \cdot \text{sen}(2.0344 \cdot k)$$

Juntando las transformadas inversas calculadas, obtenemos la solución.

$$y(k) = 2 \cdot \sqrt{5}^k \cdot \cos(2.0344 \cdot k) + 5^{(1+\frac{k}{2})} \cdot \text{sen}(2.0344 \cdot k)$$

Nota: $5 \cdot \sqrt{5}^k$ puede ponerse como $5^{1+k/2}$

Para comprobar que es correcto podemos simularlo en MatLab: (cc_007.m)

Simularemos la Función de Transferencia y la Ecuación en Diferencia resultante al realizar la Transformada Inversa y la representación de ambas debe ser idéntica. Como entrada $u(k)$ usaremos la delta de kronecker.

Primer definimos la Función de Transferencia. Usamos `tf` indicando coeficientes del numerador y denominador y un periodo de muestreo indefinido

```
Y = tf([2 12 0],[1 2 5],-1)
```

Le aplicamos a la Función de Transferencia una entrada impulso (delta de kronecker):

```
[y1,k] = impulse(Y);
```

Ahora definimos la Ecuación en Diferencias resultante.

Calculamos bT :

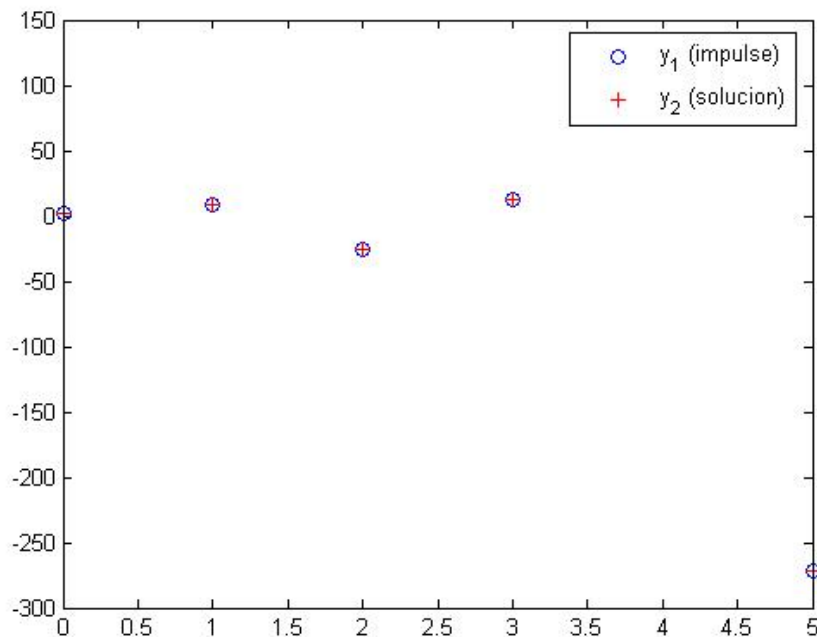
```
bT = acos(-1 / sqrt(5));
```

Calculamos $y(k)$ según nuestra ecuación,

```
y2 = 2 * 5.^(k / 2).* cos(bT * k) + 5.^(1 + k/2).* sin(bT * k);
```

y_1 e y_2 deberían ser iguales, para ello las representamos en la misma gráfica con distintos colores:

```
plot(k,y1,'bo',k,y2,'r+');  
legend('y_1 (impulse)', 'y_2 (solucion)');
```



Ejercicio 1. Resolver la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(k) = 0.5 \cdot y(k-1) - 0.25 \cdot y(k-3) - u(k) - 1.5 \cdot u(k+1) + 2 \cdot u(k-2)$$

Siendo $u(k) = \delta(k) \rightarrow$ entrada pulso (delta de kronecker)

Para resolverla tenemos que obtener 'y' en función de 'k', es decir, que no dependa ni de k+1, ni k+2 Para ello, calcularemos la transformada Z de la expresión, despejaremos Y(z) y luego haremos la transformada Z inversa de la expresión usando alguno de los métodos aprendidos.

$$Z\{y(k)\} = Y(z) = 0.5 \cdot z^{-1} \cdot Y(z) - 0.25 \cdot z^{-3} \cdot Y(z) - U(z) - 1.5 \cdot z^{-1} \cdot U(z) + 2 \cdot z^{-2} \cdot U(z)$$

Sacamos factor común Y(z) y U(z) quedando entonces:

$$Y(z) \cdot (1 - 0.5 \cdot z^{-1} + 0.25 \cdot z^{-3}) = U(z)(-1 - 1.5 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2})$$

Despejando Y(z):

$$Y(z) = \frac{(-1 - 1.5 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2})}{(1 - 0.5 \cdot z^{-1} + 0.25 \cdot z^{-3})} \cdot U(z)$$

Introducimos como entrada $\delta(k) \rightarrow U(z) = 1$ quedándonos:

$$Y(z) = \frac{(-1 - 1.5 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2})}{(1 - 0.5 \cdot z^{-1} + 0.25 \cdot z^{-3})}$$

Ahora para calcular la Transformada Inversa, pasaremos los exponentes a positivos multiplicando y dividiendo el término de la derecha por z^3 :

$$Y(z) = \frac{(-z^3 - 1.5 \cdot z^2 + 2 \cdot z)}{(z^3 - 0.5 \cdot z^2 + 0.25)}$$

Como no está en la tabla, lo pasamos a fracciones simples, para ello, primero pasamos z dividiendo al lado izquierdo de la ecuación:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{(-z^2 - 1.5 \cdot z + 2)}{(z^3 - 0.5 \cdot z^2 + 0.25)}$$

Lo primero será calcular las raíces del denominador, para ello, ayudándonos de MatLab:

```
>>roots([1 -0.5 0 0.25])
ans =

    0.5000 + 0.5000i
    0.5000 - 0.5000i
   -0.5000
```

Observamos que se obtienen dos raíces complejas simples y una real simple. La ecuación nos queda de la siguiente forma:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{(z+0.5)} + \frac{B \cdot z + C}{(z-\sigma)^2 + \omega^2}$$

Nota: donde **sigma** es la parte real y **omega** es la parte imaginaria

La explicación de la fórmula compleja se obtiene de realizar la operación de las raíces reales con las raíces complejas:

$$\frac{A1}{(z-0.5-0.5j)} + \frac{A2}{(z-0.5+0.5j)}$$

Si sumamos la expresión obtenemos:

$$\frac{A1 \cdot (z-0.5+0.5j) + A2 \cdot (z-0.5-0.5j)}{(z-0.5-0.5j) \cdot (z-0.5+0.5j)}$$

Vemos que en el denominador nos queda una multiplicación del tipo $(a+b) \cdot (a-b)$ donde $a = z - 0.5$ y $b = 0.5j$ quedando entonces la suma de los operandos al cuadrado, como sabemos, $j^2 = -1$, quedando entonces en el denominador la expresión dicha anteriormente $(z-\sigma)^2 + \omega^2$

Realizamos los cálculos del primer denominador de la expresión principal:

$$A_i = \frac{B(z)}{A(z)} \cdot (z-p_i) \Big|_{z=p_i} = \frac{(-z^2 - 1.5 \cdot z + 2)}{(z+0.5) \cdot ((z-0.5)^2 + 0.25)} \cdot (z+0.5) \Big|_{z=-0.5} = \frac{-(-0.5)^2 - 1.5 \cdot (0.5) + 2}{(-0.5-0.5)^2 + 0.25} = 2$$

Nota: $(z+0.5)$ se eliminaría con el del denominador

Ahora calcularemos B y C, para ello, primero calcularemos la suma que teníamos:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A \cdot ((z - \sigma)^2 + \omega^2) + (B \cdot z + C) \cdot (z + 0.5)}{(z + 0.5) \cdot ((z - \sigma)^2 + \omega^2)}$$

El numerador debe valer lo mismo que el numerador que teníamos al principio $(-z^2 - 1.5 \cdot z + 2)$, para resolverlo, dejamos la expresión en forma de polinomio e igualamos los coeficientes que nos queden (las z^2 con las z^2 , las z con las z etc...)

$$A \cdot ((z - \sigma)^2 + \omega^2) + (B \cdot z + C) \cdot (z + 0.5) = (-z^2 - 1.5 \cdot z + 2)$$

Nota: $(z - 0.5)^2 = z^2 + 0.25 - z$

Realizando las operaciones obtenemos:

$$A \cdot z^2 + A \cdot 0.25 - A \cdot z + 0.25 \cdot A + B \cdot z^2 + 0.5 \cdot B \cdot z + C \cdot z + 0.5 \cdot C = -z^2 - 1.5 \cdot z + 2$$

Agrupando los coeficientes de cada z^x tenemos:

$$z^2 \cdot (A + B) + z \cdot (-A + 0.5 \cdot B + C) + 0.5 \cdot (A + C) = -z^2 - 1.5 \cdot z + 2$$

Igualando término a término:

$$A + B = -1$$

$$-A + 0.5 \cdot B + C = -1.5$$

$$0.5 \cdot (A + C) = 2$$

Como ya hemos calculado anteriormente A, nos facilita los cálculos. Sino la hubiésemos calculado, también podríamos calcularla ahora, ya que tenemos 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Obtenemos:

$$A = 2, B = -3 \text{ y } C = 2$$

La expresión de $\frac{Y(z)}{z}$ sustituyendo A, B y C nos queda:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{(z + 0.5)} + \frac{-3 \cdot z + 2}{(z - 0.5)^2 + 0.25} \rightarrow Y(z) = \frac{2 \cdot z}{(z + 0.5)} + \frac{-3 \cdot z^2 + 2 \cdot z}{(z - 0.5)^2 + 0.25}$$

Expresada la Función de Transferencia en fracciones simples comparando con las expresiones de las tablas podemos calcular la Transformada Inversa. Primeramente comprobaremos los resultados obtenidos con MatLab.

Resolviendo esto en MatLab deberíamos obtener los mismos resultados, vamos a comprobarlo:

Calculamos los residuos mediante el comando **residue**, devuelve en *r* los residuos, en *p* los polos y en *k*, si existen, los polinomios simples resultantes de dividir los dos polinomios. La entrada de la función son los coeficientes del numerador y denominador

```
>>[r,p,k] = residue([-1 -1.5 2], [1 -0.5 0 0.25] )
r =
-1.5000 - 0.5000i
-1.5000 + 0.5000i
2.0000

p =
0.5000 + 0.5000i
0.5000 - 0.5000i
-0.5000
```

Como la mayoría de las veces *k* no contiene ningún valor.

Hay que tener en cuenta, que a cada residuo, le corresponde el polo de su misma posición, de este modo tenemos, según MatLab:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{z+0.5} + \frac{(-1.5+0.5j)}{(z-0.5+0.5j)} + \frac{(-1.5-0.5j)}{(z-0.5-0.5j)}$$

MatLab nos da las fracciones por separado, para poder usarlas sumamos las raíces complejas:

$$\frac{(-1.5+0.5j)}{(z-0.5+0.5j)} + \frac{(-1.5-0.5j)}{(z-0.5-0.5j)} = \frac{(-1.5+0.5j) \cdot (z-0.5-0.5j) + (-1.5-0.5j) \cdot (z-0.5+0.5j)}{(z-0.5)^2 + 0.5^2}$$

Esto también podemos realizarlo en MatLab, sino definimos ninguna variable con el nombre de 'j', automáticamente, MatLab entiende que se trata de un número complejo, los polinomios se representan como vectores, entonces ejecutamos:

$$(-1.5 + 0.5j) * [1 - 0.5 - 0.5j] + [1 - 0.5 + 0.5j] * (-1.5 - 0.5j)$$

Obtenemos [-3 , 2] → -3z + 2 por lo que efectivamente nos da el resultado esperado

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{(z+0.5)} + \frac{-3 \cdot z + 2}{(z-0.5)^2 + 0.25}$$

Expresada la función en fracciones simples procedemos a calcular la Función de Transferencia Inversa. Pero primeramente despejamos $Y(z)$ quedándonos:

$$Y(z) = \frac{2 \cdot z}{(z + 0.5)} + \frac{(-3 \cdot z + 2) \cdot z}{(z^2 - z + 0.5)}$$

$$Z^{-1}\{Y(z)\} = y(k) = Z^{-1}\left\{\frac{2 \cdot z}{(z + 0.5)}\right\} + Z^{-1}\left\{\frac{(-3 \cdot z + 2) \cdot z}{(z^2 - z + 0.5)}\right\}$$

La primera de las transformadas es directa:

$$Z^{-1}\left\{\frac{2 \cdot z}{(z + 0.5)}\right\} = 2 \cdot (-0.5)^k$$

La segunda de las transformadas tenemos que compararla con las fórmulas 16 y 17 de la tabla de transformadas. Primero compararemos los denominadores ya que ambas fórmulas a comparar (16,17) tienen el mismo denominador:

$$(z^2 - z + 0.5) = z^2 - 2 \cdot c \cdot z \cdot \cos(b \cdot T) + c^2$$

$$1 = 1$$

$$-1 = 2 \cdot c \cdot \cos(b \cdot T)$$

$$0.5 = c^2$$

Despejamos c :

$$c = \sqrt{0.5}$$

y teniendo c despejamos el coseno.

$$\cos(bT) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{0.5}}$$

Si multiplicamos y dividimos por $\sqrt{0.5}$ la expresión nos queda como

$$\cos(bT) = \sqrt{0.5}$$

Calculamos $b \cdot T$:

$$bT = \arccos(\sqrt{0.5}) = 0.7854 \text{ rad}$$

Ahora calculamos el seno con la ayuda de la propiedad $\sin^2(bT) + \cos^2(bT) = 1$ por lo que despejando el seno nos queda:

$$\sin(bT) = \sqrt{1 - \sqrt{0.5}} = \sqrt{0.5}$$

Tras todos los cálculos realizados, resumimos los siguientes valores:

$$c = \sqrt{0.5}$$

$$\cos(bT) = \sqrt{0.5}$$

$$\text{sen}(bT) = \sqrt{0.5}$$

$$bT = 0.7854\text{rad}$$

Comparamos primero el numerador de la expresión de la Z^1 que tiene el coseno.

$$z^2 - c \cdot z \cdot \cos(bT) = z^2 - \sqrt{0.5} \cdot z \cdot \sqrt{0.5} = z^2 - \frac{1}{2} \cdot z$$

Para poderlos comparar tenemos que conseguir que el numerador de nuestra expresión tenga $z^2 - \frac{1}{2} \cdot z$

Necesitamos tener la z^2 sola, por eso, dividimos el numerador entre 3 y sacamos el -3 fuera.

$$-3 \cdot Z^{-1} \left\{ \frac{z^2 - \frac{2}{3} \cdot z}{z^2 - z - 0.5} \right\}$$

Restamos $\frac{1}{2}$ a los $\frac{2}{3}$ que multiplican a la z y nos quedan $-\frac{1}{6}$:

$$-3 \cdot Z^{-1} \left\{ \frac{z^2 - \frac{1}{2} \cdot z - \frac{1}{6} \cdot z}{z^2 - z - 0.5} \right\}$$

Dividiendo el numerador en sumandos:

$$-3 \cdot Z^{-1} \left\{ \frac{z^2 - \frac{1}{2} \cdot z}{z^2 - z - 0.5} \right\} + Z^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{2} \cdot z}{z^2 - z - 0.5} \right\}$$

Nota: En el segundo término introducimos el -3 multiplicando, de ahí el $\frac{1}{2}$ que nos queda.

Ahora podemos ya calcular la Z^1 del coseno;

$$-3 \cdot Z^{-1} \left\{ \frac{z^2 - \frac{1}{2} \cdot z}{z^2 - z - 0.5} \right\} = -3 \cdot \sqrt{0.5}^k \cdot \cos(0.7854 \cdot k)$$

Para realizar la segunda expresión resultante, como ya tenemos el denominador y tenemos sólo una z en el numerador, haremos las transformaciones necesarias para que los numeradores sean iguales.

$$Z^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{2} \cdot z}{z^2 - z - 0.5} \right\}$$

$$c \cdot z \cdot \text{sen}(bT) = \sqrt{0.5} \cdot z \cdot \sqrt{0.5} = 0.5 \cdot z = \frac{1}{2} \cdot z$$

Como vemos, lo que necesitamos, es exactamente lo que tenemos, por tanto podemos aplicar la transformación directamente.

$$Z^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{2} \cdot z}{z^2 - z - 0.5} \right\} = \sqrt{0.5}^k \cdot \text{sen}(0.7854 \cdot k)$$

Uniendo las tres expresiones obtenemos $y(k)$:

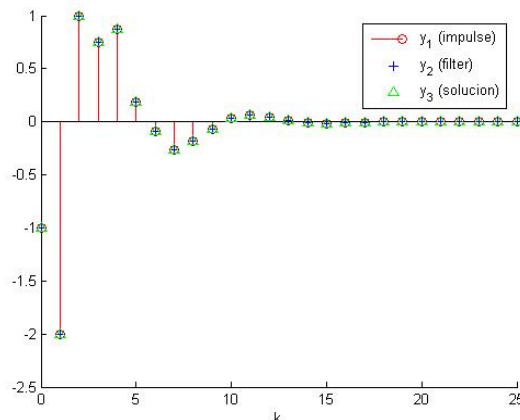
$$y(k) = 2 \cdot (-0.5)^k - 3 \cdot \sqrt{0.5}^k \cdot \cos(0.7854 \cdot k) + \sqrt{0.5}^k \cdot \text{sen}(0.7854 \cdot k)$$

Podríamos sacar $\sqrt{0.5}^k$ como factor común para dejar la expresión más legible.

A continuación vamos a comprobar que realmente la solución es correcta.

1. Tenemos la ecuación en diferencia del sistema
2. La función de transferencia
3. La ecuación a lo largo del tiempo

En MatLab, para el primer caso usaremos **filter**, para la segunda, lo haremos con **impulse** y para la tercera simplemente daremos valores a k y representaremos $y(k)$ en esos valores, todas deberían dar el mismo resultado. (cc_008.m)



Ejercicio 2. Resolver la siguiente Ecuación en diferencias, siendo la entrada aplicada una señal escalón de amplitud 1.

$$y(k) = 0.5 \cdot y(k-1) - 0.12 \cdot y(k-2) + 0.008 \cdot y(k-3) + u(k-2) + 2 \cdot u(k-3)$$

$$u(k) = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$$

Los pasos a seguir son:

1. Aplicar la transformada Z a la secuencia
2. Despejar Y(z)
3. Aplicar la transformada Z⁻¹ mediante los métodos vistos anteriormente.

Realizamos la transformada Z

$$Z\{y(k)\} = 0.5 \cdot z^{-1} \cdot Y(z) - 0.12 \cdot z^{-2} \cdot Y(z) + 0.008 \cdot z^{-3} \cdot Y(z) + z^{-2} \cdot U(z) + 2 \cdot z^{-3} \cdot U(z)$$

Agrupamos las Y(z) por un lado y las U(z) por otro:

$$Y(z)(1 - 0.5z^{-1} + 0.12z^{-2} - 0.008z^{-3}) = U(z)(z^{-2} + 2z^{-3})$$

Dividimos Y(z) entre U(z) para obtener la función de transferencia y pasamos las z a exponente positivo multiplicando y dividiendo entre el mayor exponente en positivo:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{(z^{-2} + 2 \cdot z^{-3})}{(1 - 0.5 \cdot z^{-1} + 0.12 \cdot z^{-2} - 0.008 \cdot z^{-3})} = \frac{(z + 2)}{(z^3 - 0.5 \cdot z^2 + 0.12 \cdot z - 0.008)}$$

Esta función de transferencia la podemos simular en MatLab mediante step, que simula la entrada de una señal escalón. Otra opción es usar impulse, para simular la entrada de una delta, pero para ello, tendríamos que multiplicar la expresión anterior por la transformada de U(z) (señal escalón) que es $\frac{z}{z-1}$.

Multiplicamos la expresión anterior por la transformada de la señal escalón:

$$Y(z) = \frac{(z + 2)}{(z^3 - 0.5 \cdot z^2 + 0.12 \cdot z - 0.008)} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{(z + 2) \cdot z}{(z^3 - 0.5 \cdot z^2 + 0.12 \cdot z - 0.008) \cdot (z-1)}$$

Ahora sabemos que uno de los polos es 1, que hace cero a $(z-1)$, el resto lo calculamos mediante MatLab y obtenemos:

```
>>roots([1 -0.5 0.12 -0.008])
```

Obtenemos:

0.1

0.2 ± 0.2j

Pasamos la z del numerador dividiendo a $Y(z)$ para que nos quede una z en el numerador y podamos comparar en las tablas.

Escribiendo la expresión descompuesta en factores obtenemos:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{(z+2)}{(z-0.1) \cdot (z-1) \cdot ((z-0.2)^2 + 0.2^2)}$$

Nota: El polo complejo sale de $(z-\sigma)^2 + \omega^2$ con $0.2 \pm 0.2j$

Descomponiéndolo en fracciones simples obtenemos:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{(z+2)}{(z-0.1) \cdot (z-1) \cdot ((z-0.2)^2 + 0.2^2)} = \frac{A}{(z-0.1)} + \frac{B}{(z-1)} + \frac{C \cdot z + D}{((z-0.2)^2 + 0.2^2)}$$

Sumando las fracciones y comparando el resultado con la expresión de la izquierda podríamos obtener A , B , C y D . Para hacerlo de forma más rápida, calcularemos los residuos, los polos y el término independiente con **residue**, de esta manera obtendremos las incógnitas.

```
[R,P,K] = residue([1,2],conv([1 -0.5 0.12 0.008],[1 -1]))
```

La función **conv**, la usamos para multiplicar polinomios, esto lo usaremos porque en el denominador de la expresión de la izquierda tenemos un factor de dos polinomios.

Si ejecutamos por separado **conv**, podemos comprobar que realmente da el resultado de multiplicar ambos polinomios

Al ejecutar el comando obtenemos:

$$R = \begin{matrix} 4.9020 & (B) \\ 20.8824 + 21.4706i \\ 20.8824 - 21.4706i \\ -46.6667 & (A) \end{matrix}$$

$$P = \begin{matrix} 1.0000 \\ 0.2000 + 0.2000i \\ 0.2000 - 0.2000i \\ 0.1000 \end{matrix}$$

$$K = []$$

Ahora asignamos a cada residuo de R el polo asignado en P , vemos que el primer residuo se corresponde a B y el último a A , los otros dos al ser complejos hay que calcularlos igualando las expresiones.

Sustituyendo A y B por sus valores obtenemos:

$$\frac{(z+2)}{(z-0.1) \cdot (z-1) \cdot ((z-0.2)^2 + 0.2^2)} = \frac{-46.6667}{(z-0.1)} + \frac{4.9}{(z-1)} + \frac{C \cdot z + D}{((z-0.2)^2 + 0.2^2)}$$

Según MatLab tenemos que el residuo $20.8824 + 21.4706i$ va asociado al polo $0.2000 + 0.2000i$ y lo mismo con el otro, sustituyendo tendremos:

$$\frac{(20.8824 + 21.4706j)}{(0.2 + 0.2j)} + \frac{(20.8824 - 21.4706j)}{(0.2 - 0.2j)}$$

Realizamos la suma, para calcular los productos podemos usar MatLab:

```
(20.8824+21.4706i)*[1, -0.2+0.2j] + (20.8824-21.4706i)*[1, -0.2-0.2j]
ans =
41.7684 -16.9412
```

El primer resultado corresponde al primer producto y lo mismo ocurre con el segundo.

Sustituyendo en la ecuación ya tenemos calculado todas las incógnitas y tenemos la función descompuesta en fracciones simples:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{-46.6667}{(z-0.1)} + \frac{4.9}{(z-1)} + \frac{41.76 \cdot z - 16.9412}{((z-0.2)^2 + 0.2^2)}$$

Nota: Hemos usado MatLab para acelerar los cálculos, pero hay que saber calcularlos a mano.

Aplicamos ahora la Z^{-1} uno a uno a todos los términos, antes, pero antes despejamos $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{-46.6667 \cdot z}{(z-0.1)} + \frac{4.9 \cdot z}{(z-1)} + \frac{41.76 \cdot z^2 - 16.9412 \cdot z}{((z-0.2)^2 + 0.2^2)}$$

Las transformadas inversas de las dos primeras fracciones son directas:

$$Z^{-1} \left\{ \frac{-46.6667 \cdot z}{(z-0.1)} \right\} = -46.6667 \cdot (0.1)^k$$

$$Z^{-1} \left\{ \frac{4.9 \cdot z}{(z-1)} \right\} = 4.9 \cdot 1^k = 4.9; \text{ como } k \text{ es siempre positivo, podemos asegurar que}$$

1^k siempre es 1

Para realizar la transformada inversa del término que falta, lo compararemos con las respectivas fórmulas para ir obteniendo lo que nos interese, primero prepararemos el denominador comparándolo con la fórmula del coseno o el seno ya que son iguales.

$$(z-0.2)^2 + 0.2^2 = z^2 + 0.2^2 - 2 \cdot z \cdot 0.2 + 0.2^2 = z^2 - 0.4z + 0.08$$

Esta expresión tiene que ser igual a $z^2 + 2 \cdot c \cdot z \cdot \cos(bT) + c^2$, comparado ambas obtenemos

$$z^2 - 0.4z + 0.08 = z^2 + 2 \cdot c \cdot z \cdot \cos(bT) + c^2$$

$$0.08 = c^2 \rightarrow c = \sqrt{0.08}$$

$$-0.4 = 2 \cdot z \cdot \cos(bT) \rightarrow \cos(bT) = \frac{0.4}{2 \cdot c} = 0.7071$$

$$bT = \arccos(0.7071) = 45^\circ = 0.7854 \text{ rad (MatLab lo devuelve en radianes)}$$

$\text{sen}(bT) = 0.7071$; como el ángulo es 45° , el seno es igual que el coseno;

Ahora pasamos a buscar los numeradores usando la misma técnica. Antes sustituimos en el numerador de la fórmula del coseno, los valores calculados para saber con qué expresión tenemos que comparar

$$z^2 \cdot c \cdot \cos(bT) = z^2 - z \cdot 0.283 \cdot 0.7071 \approx z^2 - 0.2 \cdot z$$

$$Z^{-1} \left\{ \frac{(41.76 \cdot z^2 - 16.94 \cdot z)}{\left((z - 0.2)^2 + 0.2^2 \right)} \right\}; \text{ como la } z^2 \text{ debe estar sola, sacamos el } 41.76 \text{ nos}$$

queda entonces:

$$41.76 \cdot Z^{-1} \left\{ \frac{\left(z^2 - \frac{16.94}{41.76} \cdot z \right)}{\left((z - 0.2)^2 + 0.2^2 \right)} \right\} = 41.76 \cdot Z^{-1} \left\{ \frac{(z^2 - 0.4 \cdot z)}{\left((z - 0.2)^2 + 0.2^2 \right)} \right\}$$

Como necesitamos que a la z la multiplique 0.2 , dividimos $0.4z$ en $0.2z + 0.2z$ quedando entonces:

$$41.76 \cdot Z^{-1} \left\{ \frac{(z^2 - 0.2 \cdot z - 0.2 \cdot z)}{\left((z - 0.2)^2 + 0.2^2 \right)} \right\}$$

Dividimos la expresión en dos sumandos sacando uno de los $-0.2z$ del numerador:

$$41.76 \cdot Z^{-1} \left\{ \frac{(z^2 - 0.2 \cdot z)}{\left((z - 0.2)^2 + 0.2^2 \right)} \right\} + 41.76 \cdot Z^{-1} \left\{ \frac{-0.2 \cdot z}{\left((z - 0.2)^2 + 0.2^2 \right)} \right\}$$

La transformada del primer sumando es directa

$$41.76 \cdot Z^{-1} \left\{ \frac{(z^2 - 0.2 \cdot z)}{\left((z - 0.2)^2 + 0.2^2 \right)} \right\} = 41.76 \cdot 0.283^k \cdot \cos(0.7854 \cdot k)$$

Ahora pasamos a comparar el numerador del segundo sumando con el numerador de la expresión del seno:

$$z \cdot c \cdot \sin(bT) = z \cdot 0.283 \cdot 0.7071 = 0.2z$$

Como vemos, tenemos exactamente lo que necesitamos, tan solo sacamos el signo '-' fuera de la expresión, una vez hecho tenemos la transformada directa:

$$-41.76 \cdot Z^{-1} \left\{ \frac{0.2 \cdot z}{\left((z - 0.2)^2 + 0.2^2 \right)} \right\} = -41.76 \cdot 0.283^k \cdot \sin(0.7854 \cdot k)$$

Uniendo todas las transformadas obtenemos la expresión final. Al haber ido aproximando a lo largo de los cálculos, la gráfica obtenida será ligeramente distinta a las obtenidas directamente mediante la función de transferencia.

$$y(k) = -46.6667 \cdot (0.1)^k + 4.9 + 41.76 \cdot 0.283^k \cdot (\cos(0.7854 \cdot k) - \text{sen}(0.7854 \cdot k))$$

A continuación lo probaremos en MatLab siguiendo los pasos siguientes: (cc_009.m)

- Representación de la Función de Transferencia

Podemos calcular $\frac{Y(z)}{U(z)}$ y usamos **step** o despejamos $Y(z)$ y usamos **impulse**

a. $G = \text{tf}(\dots, -1);$

$\text{step}(\dots)$

b. $Y = G \cdot U \rightarrow$ Si multiplicamos $G \cdot U$, la entrada sería un pulso, no un escalón.

No hay que olvidar que $Y/U = G$

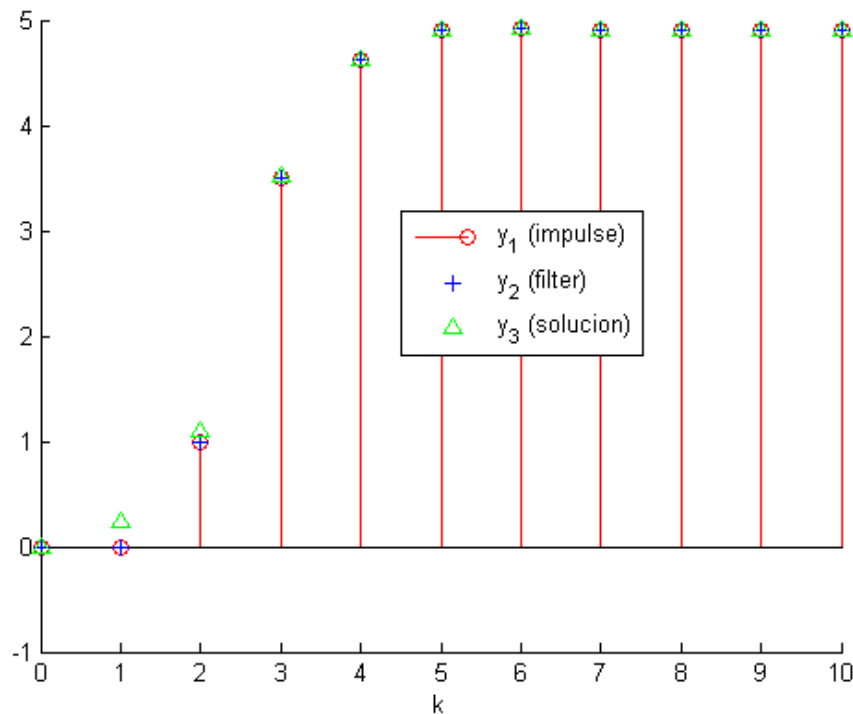
$\text{impulse}(\dots)$

- Representación de la Ecuación en Diferencias mediante **filter**

$\text{filter}(\dots)$

$u = \text{ones}(\text{size}(k))$

- Representación de la Ecuación obtenida



Al observar las gráficas vemos que el sistema es estable ya que tiende a valer 5, aunque la salida es incorrecta ya que le estamos dando de referencia una señal escalón de valor 1 y no 5. Este problema ocurre porque el sistema con el que estamos tratando es en lazo abierto, más adelante aprenderemos como realimentar al sistema para que tienda al valor que queramos. Este error es conocido como “**Error de Estado Estacionario**”.

Para calcular este error usaremos el teorema del valor final de la transformada Z para no tener que calcular la fórmula $y(k)$, teniendo esta fórmula podemos calcular el valor cuando k tiende a infinito. Obtendríamos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = 4.9$$

El teorema del valor final lo tenemos al final de la tabla de transformadas, ahí vemos que nos dice que podemos calcular:

$$y(\infty) \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \cdot Y(z)$$

Para demostrarlo lo calcularemos con el ejemplo anterior:

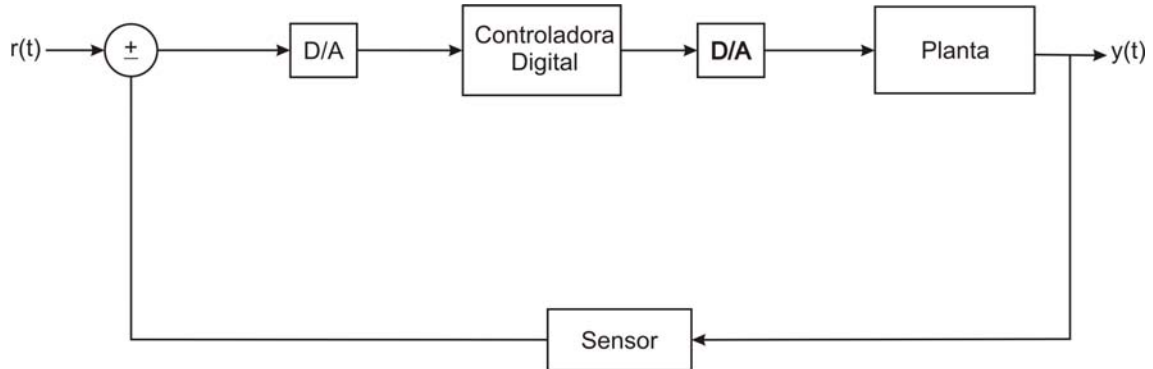
$$Y(z) = G(z) \cdot U(z)$$

$$Y(z) = \frac{(z+2)}{(z^3 - 0.5z^2 + 0.12z - 0.008)} \cdot \frac{z}{(z-1)}$$

$$y(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z+2}{z^3 - 0.5z^2 + 0.12z - 0.008} = \frac{1+2}{1-0.5+0.12-0.008} = 4.9020$$

Tema 2. Sistemas Muestreados

Introducción



Cuando vimos el esquema de los sistemas de control, vimos que necesitábamos conversores A/D y D/A, para poder tratar las señales analógicas en el PC debemos digitalizarla, para ello, la muestrearemos, digitalizaremos y la introduciremos al PC. Este control no puede ser instantáneo, por ello, haremos una discretización.

Veremos el efecto que tiene el muestreo y la reconversión de la señal sobre el sistema.

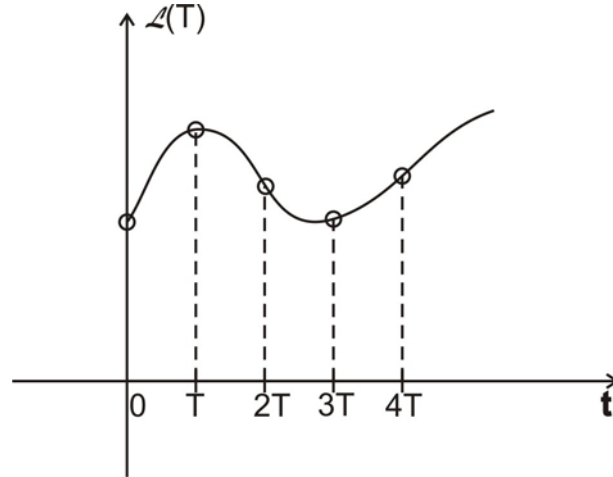
Usaremos los conceptos de:

- Muestreo mediante Impulsos: Muestreo ideal
- Reconstrucción mediante un mantenedor de orden 0
- Reconstrucción mediante un mantenedor de orden 1 (no lo usaremos)
- Transformada * (estrella)

A partir de estos conceptos veremos como aplicar la transformada Z

Muestreo Mediante Impulsos

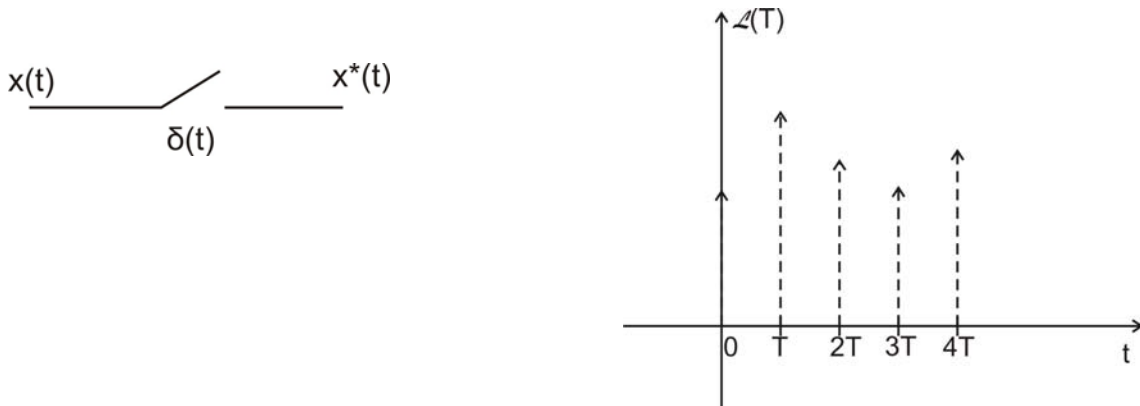
Tenemos una señal que queremos muestrear tenemos que elegir un periodo de muestreo (síncrono o asíncrono) que nos dirá cada cuanto vamos a medir la señal.



Para el análisis usaremos el síncrono (constante), esto quiere decir que muestrearemos la señal cada T segundos.

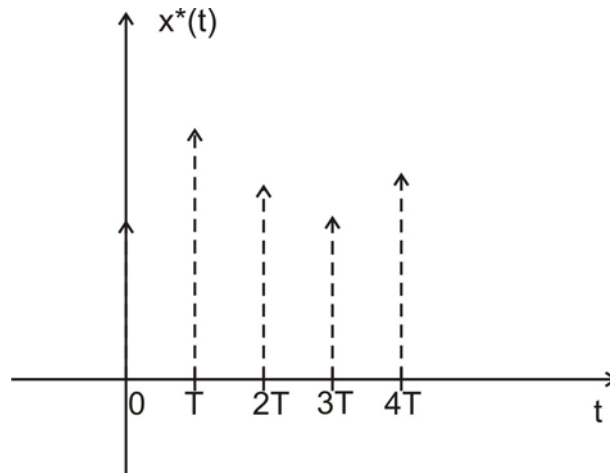
Suponemos que el muestreo es ideal, por eso lo llamamos mediante impulsos.

Tendremos un interruptor que recibe como entrada la señal a muestrear $x(t)$, cerrará cada T segundos y dará a su salida $x^*(t)$.



En realidad nunca podremos construir un sistema que de una salida exacta con una señal impulsiva, sino que tendremos el valor de la señal durante un tiempo muy pequeño, que será el que tarde el interruptor en abrir y cerrar, este tiempo será infinitamente menor que la constante de tiempo del sistema, por ello supondremos que es cero y por tanto la señal será un impulso. $Z \ll Z_s \rightarrow Z = 0$

En este caso $x^*(t)$ será igual al tren de impulsos.



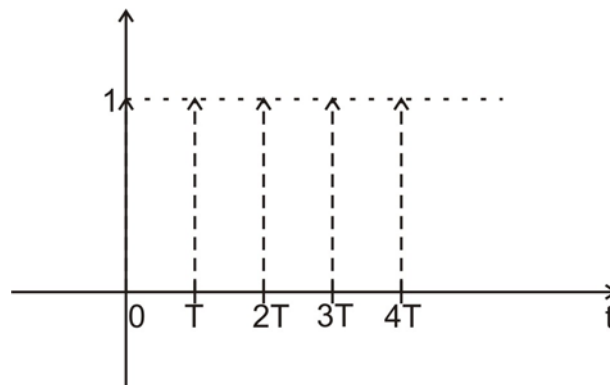
Por tanto será igual a la suma de todos los impulsos; la amplitud de cada pulso será el valor de la señal en el instante muestreado por $\delta(t)$, con esto nos queda:

$$x^*(t) = x(0) \cdot \delta(t) + x(T) \cdot \delta(t - T) + x(2T) \cdot \delta(t - 2T) \dots$$

Resumiendo sería:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k \cdot T) \cdot \delta(t - k \cdot T)$$

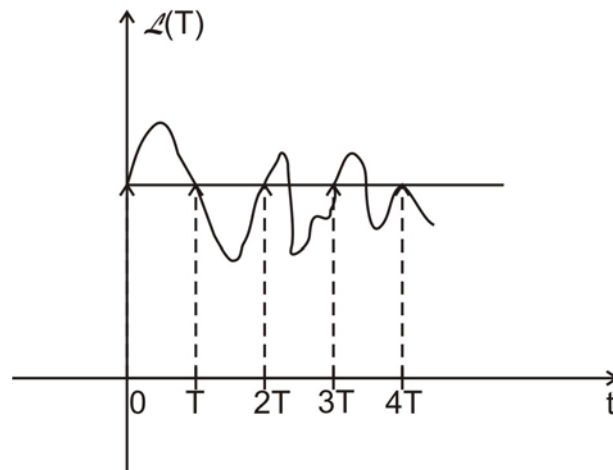
Si tenemos una secuencia de pulsos unitaria, serían una serie de impulsos unitarios y al multiplicarlo por la señal obteniendo nos da:



$$\delta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k \cdot T) \rightarrow x^*(t) = x(t) \cdot \delta(t)$$

Esto se puede ver como una modulación donde $x^*(t)$ es la señal muestreada, $x(t)$ es la Moduladora y $\delta(t)$ la portadora.

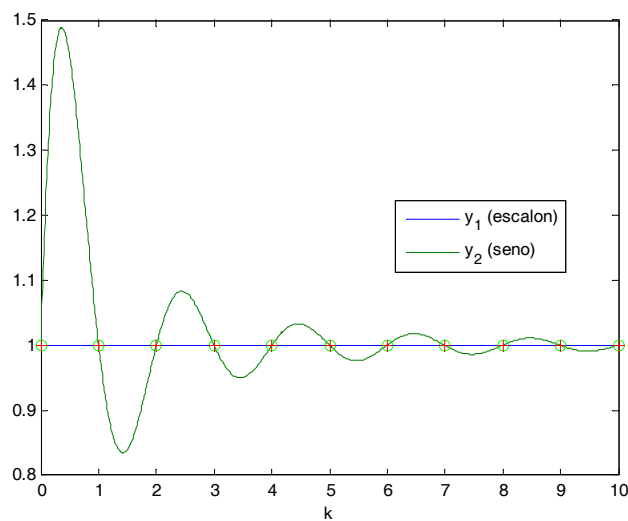
El muestreador solo tendrá valores de la señal en los instantes de muestreo, el problema sería que tuviésemos otra señal distinta pero con los mismos valores en los instantes de muestreo. Esto implica que este sistema puede tener la misma salida para distintas entradas, por tanto no puede tener función de transferencia, no es LTI, tendremos que buscar un método para poder aplicar la transformada. Para asegurarnos de que la señal que está entrando es la deseada tendremos que aplicar el teorema del muestreo para elegir el periodo de muestreo.



Comprobaremos esto mediante un ejercicio.

Ejercicio1. Representar en MatLab la señal escalón, representar la siguiente

señal: $\frac{(1 + \text{sen}(\pi \cdot t))}{(t + 1)^2}$ y representar luego ambas con un periodo de muestreo de 1 s.



Se observa que en este caso las señales muestreadas son iguales, por eso el periodo de muestreo no sería correcto.

Transformada de Laplace

Usaremos la transformada de Laplace

$$L\{\delta(t)\} = 1$$

$$L\{x(t-T)\} = e^{-Ts}$$

Las propiedades de la transformada de Laplace serán las mismas que las de Z.

Aplicaremos la transformada de Laplace a la señal muestreada:

$$X^*(s) = L\{x^*(t)\} = L\{x(0) \cdot \delta(t)\} + L\{x(T) \cdot \delta(t-T)\} + L\{x(2 \cdot T) \cdot \delta(t-2 \cdot T)\} + \dots \\ \dots + L\{x(k \cdot T) \cdot \delta(t-k \cdot T)\}$$

Haremos la transformada de cada sumando.

$$X^*(s) = x(0) \cdot 1 + x(T) \cdot e^{-Ts} + x(2 \cdot T) \cdot e^{-2Ts} + \dots + x(k \cdot T) \cdot e^{-kTs}$$

Nota: $L\{\delta(t-T)\} = e^{-Ts} \cdot L\{\delta(t)\} = e^{-Ts}$

Poniéndolo en forma de sumatoria:

$$X^*(s) = L\{x^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k \cdot T) \cdot e^{-kTs}$$

A esta expresión se le llama la **Transformada Estrella** de x(t)

Definición de la Transformada Z

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k \cdot T) \cdot z^{-k}$$

Si lo comparamos con la expresión de la Transformada Estrella vemos que son idénticas, solo que en lugar de “e” tenemos “z”, si definimos

$$z = e^{kTs} \quad \rightarrow \quad s = \frac{\ln(z)}{T}$$

Esto quiere decir que: $X(z) = X^*(s) \Big|_{s=\frac{\ln(z)}{T}}$

Podemos calcular la transformada Z de una señal discreta en lugar de la transformada de Laplace de una señal en tiempo continuo, más difícil. De esta forma

cuando tengamos una señal en tiempo continuo, hallaremos la transformada $X^*(s)$ y luego la pasaremos a transformada Z sustituyendo s por $\frac{\ln(z)}{T}$.

También podríamos resolver este problema mediante la integral de convolución, y aunque no la vamos a ver, sí veremos algunas propiedades que nos pueden servir:

Nota: tengamos en cuenta que: $\omega_s = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ para las propiedades siguientes.

Propiedades de la Integral de Convolución

$$x^*(t) = x(t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k \cdot T) \quad \rightarrow \quad X^*(s) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) \cdot \frac{1}{1 - e^{-T(s-p)}} dp$$

$L\{f(t) \cdot g(t)\} = \text{Integral de Convolución}$

En la expresión de la integral, p es una expresión compleja, la resolución se encuentra en las páginas 84 a 87 del Ogata.

Algunas propiedades son:

- Si integramos cogiendo un camino hacia la izquierda:
 - Si el denominador de la expresión $X(s)$ es de mayor grado en 's' que el numerador, podemos calcular la $X^*(s)$ de la siguiente forma:

$$X^*(s) = \sum_{\text{polos}} \left[\text{residuo de } \frac{X(s) \cdot z}{z - e^{Ts}} \text{ en un polo de } X(s) \right]$$

- Si el camino se integra por la derecha salen dos resultados:
 - Si el denominador de $X(s)$ tiene 2 grados más en 's' que el numerador:

$$X^*(s) = \left(\frac{1}{T} \right) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s + j \cdot \omega_s \cdot k)$$

- Si el denominador tiene un grado más en 's' que el numerador:

$$X^*(s) = \left(\frac{1}{T} \right) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s + j \cdot \omega_s \cdot k) + \frac{1}{2} \cdot x(0^+)$$

Propiedades de la Transformada Estrella:

1. $X^*(s)$ es periódica en 's', con periodo $j\omega_s$

$$X^*(s) = X^*(s+j\omega_s)$$

Demostración: Esto sale de la definición de transformada estrella:

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k \cdot T) \cdot e^{-kTs}$$

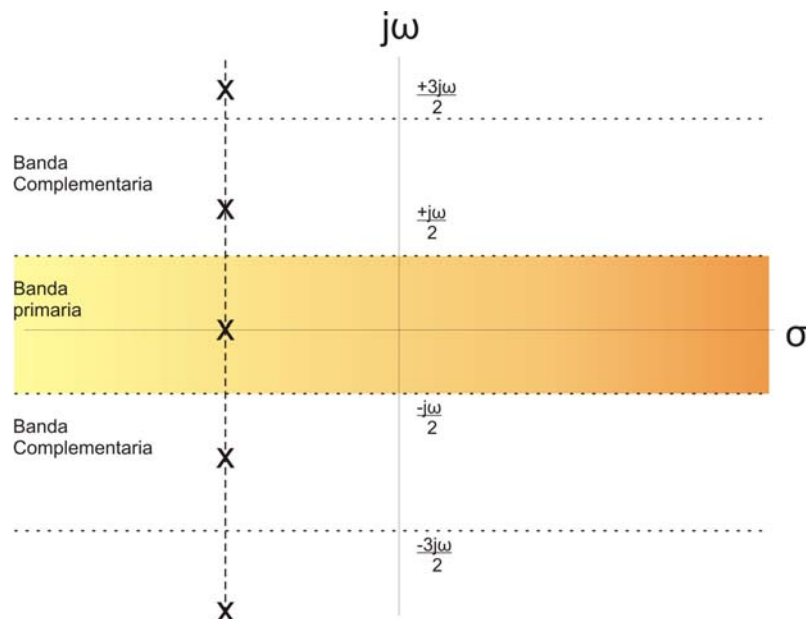
Probaremos con $s = s+j\omega_s$:

$$\begin{aligned} X^*(s + j\omega_s) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot e^{-kT(s+j\omega_s)} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot e^{-kTs - jkT\omega_s} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot (e^{-kTs} \cdot e^{jkT\omega_s}) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot (e^{-kTs} \cdot 1) \end{aligned}$$

Nota: $e^{-jkT\omega_s} = e^{-jkT \cdot \frac{2\pi}{T}} = e^{-jk2\pi} = (\text{según la fórmula de Euler } e^{a+bj} = \cos(b) + j \sin(a))$
 $= \cos(-2 \cdot \Pi \cdot k) + j \sin(0) = 1$

Vemos que son iguales, por tanto la propiedad es cierta.

2. Si $X(s)$ tiene un polo "s1" en $s \rightarrow X^*(s)$ tiene polos en $s_1 \pm m \cdot j\omega_s$ para $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, es decir, tendrá infinitos polos.



Teorema del Muestreo

Para que la señal original pueda ser reconstruida a partir de una señal muestreada, la frecuencia de muestreo debe ser como mínimo el doble de la mayor de las frecuencias de la señal original (de entrada).

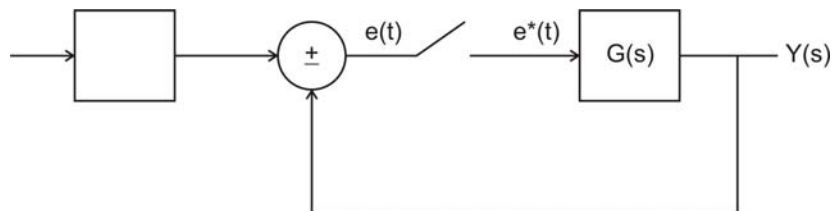
$$\begin{array}{c}
 x(t) \text{ --- } \diagup \text{ --- } x^*(t) \\
 \delta(t) \\
 \\
 \omega_s \geq 2\omega_1 \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T}
 \end{array}$$

En la práctica esto no es suficiente, en la práctica se elige entre 10 y 20 veces superior a la frecuencia más alta de la señal de entrada. Esto se debe a que el proceso de reconstrucción no es ideal debido a que los elementos empleados no son ideales.

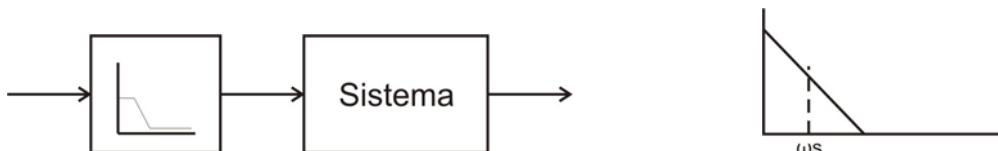
$$20\omega_1 \geq \omega_s \geq 10\omega_1$$

¿Como saber la máxima frecuencia de la señal de entrada?

Si la entrada es conocida, sabremos esta frecuencia, en el caso de no controlar esta entrada, en principio no tenemos por qué conocerla.



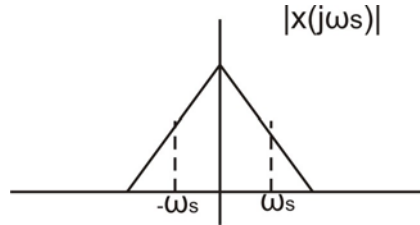
Lo que hacemos es suponer un periodo de muestreo y colocamos en la entrada de nuestro sistema un filtro Paso Bajo a ω_1 aseguramos que a la entrada no habrá ninguna señal con una frecuencia mayor a esta.



Fijando ω_1 aseguraremos que la señal de entrada nunca tendrá una frecuencia mayor (procedentes de señales de ruidos), para poner este límite se supone que el sistema es conocido, de lo contrario nunca podríamos saber que límite de frecuencia poner.

¿Por qué el teorema del muestreo falla?

Supongamos una señal de entrada cualquiera con una frecuencia máxima limitada ω_1 , tendrá ganancia 0 en ω_1 tanto por la izquierda como por la derecha.



Si recordamos, la expresión de la transformada estrella:

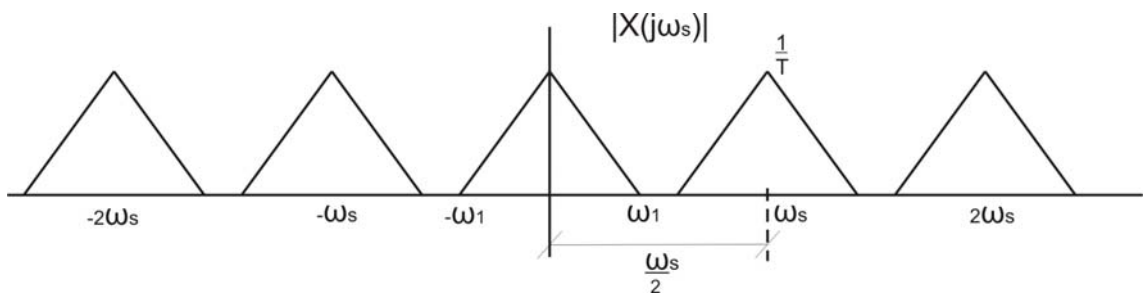
$$X^*(s) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(s + j\omega_s k) + \frac{1}{2} x(0^+)$$

Si hacemos un estudio en frecuencia, sustituimos 's' por 'j\omega' quedando entonces:

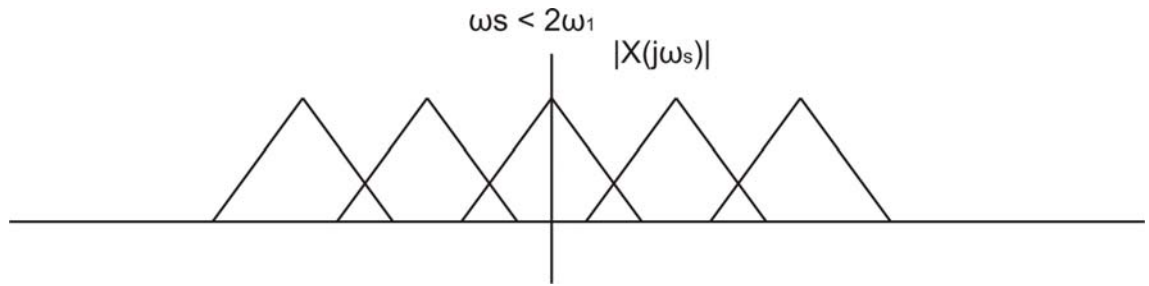
$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(j\omega + j\omega_s k)$$

Al estar multiplicada por k indica que la señal es periódica con frecuencia ω_s , con periodo $\frac{2 \cdot \Pi}{\omega_s}$. Esto indica que si representamos el módulo de la señal muestreada en

frecuencia, tendremos esta señal repetida cada periodo, con una ganancia $\frac{1}{T}$ (ya que multiplica a toda la señal).



Si ω_1 fuese exactamente ω_s cada señal comenzaría justo cuando terminara la anterior, de esta manera, para frecuencias mayores no se solaparían, si la frecuencia fuese menor, al solaparse, la ganancia no sería la de la señal de entrada.



El hecho de que la señal muestreada sea periódica presenta el inconveniente de que si la señal de entrada contiene frecuencias altas, esta frecuencia se repetirá también en frecuencias bajas y esto afectará a la hora de reconstruir la señal. Este efecto se conoce como **Desdoblamiento** o **Aliasing**.

La forma de reducir este efecto es, como se comentó, colocar un filtro paso bajo en la entrada. Nosotros no lo trataremos matemáticamente, supondremos que este efecto está controlado.

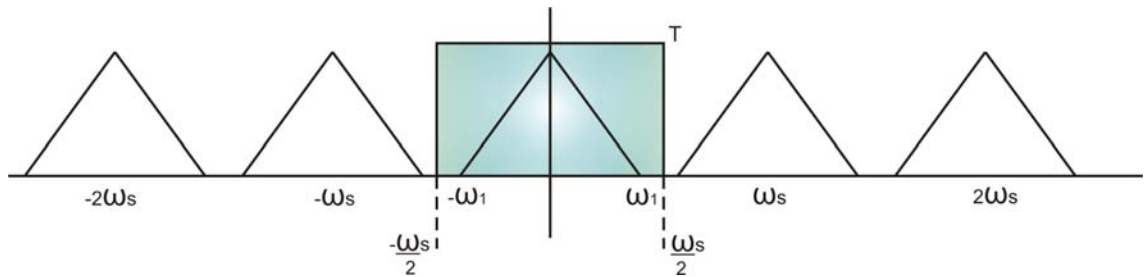
Mantenedores y Muestreadores de señal

Reconstrucción de la Señal Continua a partir de la Señal Muestreada

Queremos reconstruir la señal muestreada para volver a obtener la señal de entrada.



Para ello, la primera de las condiciones será cumplir el **teorema del muestreo**. Luego, con un filtro de ganancia T y que quite la señal muestreada para frecuencias mayores a $\frac{\omega_s}{2}$ y $-\frac{\omega_s}{2}$, tendríamos la señal de entrada.



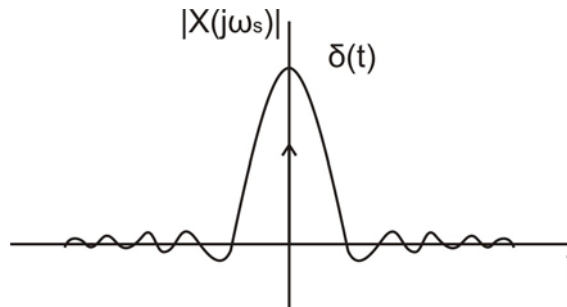
Este filtro se conoce como **Mantenedor** (Retenedor, Reconstructor) **Ideal** con ganancia T.

A partir de las especificaciones en frecuencia, se podrían obtener las especificaciones en el tiempo realizando transformadas inversas de Fourier (no las veremos).

La función Respuesta Impulsiva del Reconstructor Ideal se define como:

$$y(t) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega_s t}{2}\right)}{\frac{\omega_s t}{2}}$$

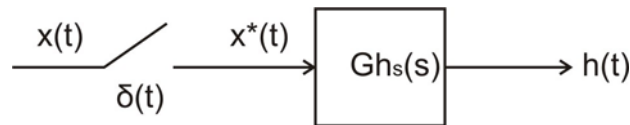
Si representamos esta salida en el dominio del tiempo veremos que el sistema responde antes de que llegue la entrada. Esto es debido a que el reconstructor ideal es un sistema NO CAUSAL, depende de las entradas futuras y esto no es físicamente realizable (no podemos adivinar el futuro).



Con este sistema el teorema del muestreo sí nos serviría, pero al ser no realizable el teorema del muestreo no se cumple en la realidad y por esta razón nunca podremos reconstruir una señal de entrada exactamente.

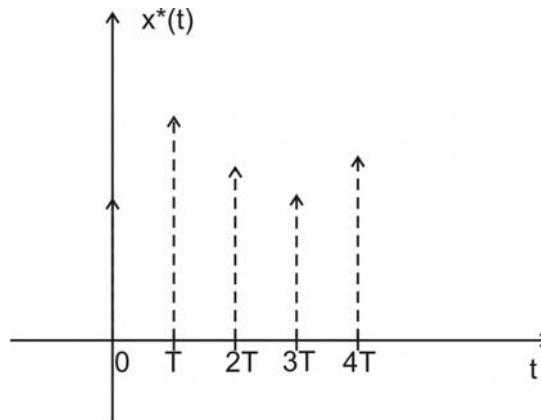
Mantenedores (Hold) Causales (Mantenedores de Orden 'N')

Necesitamos un sistema al que le llega una señal; mediante un muestreador obtenemos la señal muestreada que entrará en un mantenedor que dará una salida $h(t)$ que debe ser lo más parecida posible a la señal de entrada, este muestreador será $Gh_n(s)$.

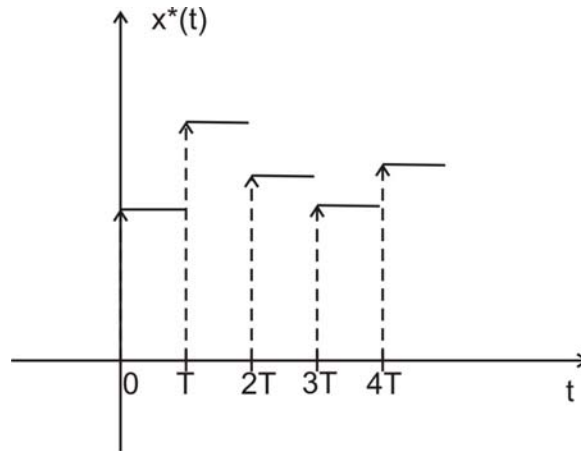


Nosotros veremos los de orden 0 y 1.

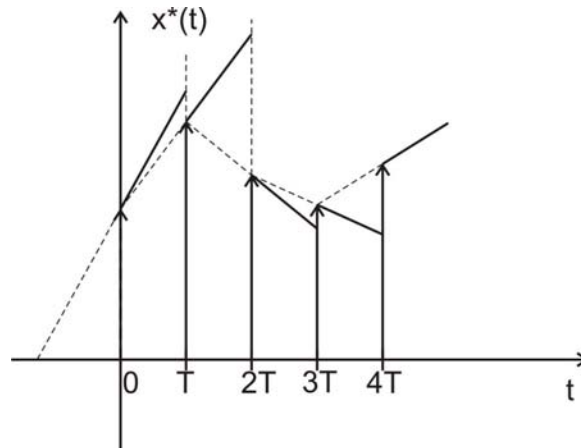
Si representamos la señal muestreada en el tiempo tendremos:



En función de cuantas señales anteriores tengamos será el orden del mantenedor. En el caso de tener uno de orden 0, lo único que podemos hacer es trazar una línea recta hasta la siguiente muestra.



Si disponemos de la señal anterior (orden 1), trazaríamos una línea recta.



Aumentando el grado la salida se parecerá más a la entrada, el problema es que al aumentar el orden se aumenta la complejidad, en la realidad se ve que de orden 0 a orden 1 la mejora es poco significativa, por ello, en la gran mayoría de casos se usa el de orden 0 debido a su sencillez.

La **ecuación general de un mantenedor de orden 'n'** que será la que cree los trocitos de curva será:

$$h(kT + \tau) = a_n \cdot \tau^n + a_{n-1} \cdot \tau^{n-1} + a_{n-2} \cdot \tau^{n-2} + \dots + a_1 \cdot \tau^1 + a_0$$

Vemos que entonces, las ecuaciones del mantenedor de orden 0 y 1 serían:

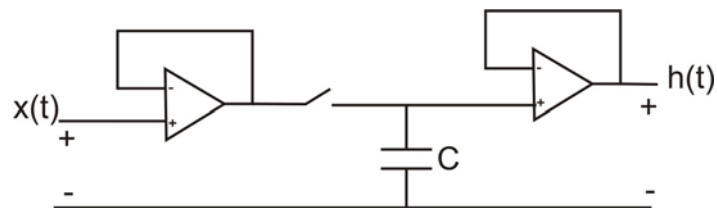
$$h(kT + \tau) = a_0$$

$$h(kT + \tau) = a_1 \cdot \tau + a_0$$

En los instantes exactos de muestreo, $\tau = 0$, teniendo entonces que todos los términos de la ecuación son 0 excepto el término independiente a_0 que debería valer la propia señal $x(kT)$ quedando entonces la ecuación: $h(kT + \tau) = x(kT)$.

Para el caso de un mantenedor de orden 1: $h(kT + \tau) = a_1\tau + x(kT)$.

Circuito Muestreador + Mantenedor de orden 0 (Hold 0)



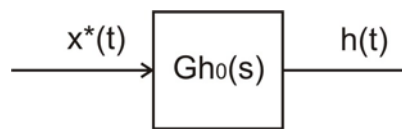
Sistemas Híbridos

El muestreador tiene una entrada en tiempo continuo y da como salida una señal discreta y el retenedor es al revés, entrada discreta y salida continua

Retenedor de Orden 0 (Hold 0)

El sistema para una entrada muestreada devuelve una salida en tiempo continuo manteniendo la señal de entrada constante hasta el siguiente instante de muestreo.

Veremos como hallar la función de transferencia del sistema. Para calcularla, introducimos cualquier señal de entrada en el retenedor de Orden 0 y vemos la salida producida, a ambas expresiones (entrada / salida) le calculamos su transferencia de Laplace, por último dividiremos la transformada de Laplace de la salida entre la transformada de la entrada, dándonos como resultado la Función de Transferencia del Retenedor de Orden 0.



$$G_{ho}(s) = \frac{H(s)}{X^*(s)}$$

En primer lugar aplicaremos una entrada al sistema, en nuestro caso, una señal impulso porque es la más simple.

La ecuación del mantenedor de orden 0 era:

$$h(kT + \tau) = x(kT) \quad \text{cuando} \quad 0 \leq \tau \leq T$$

Veremos como se comporta un mantenedor de orden 0 ante una señal de entrada impulso en los instantes:

$$k = 0: \quad h(\tau) = x(0) = 1; \quad \rightarrow \text{recordemos que era una entrada delta}$$

$$k = 1: \quad h(T + \tau) = x(T) = 0;$$

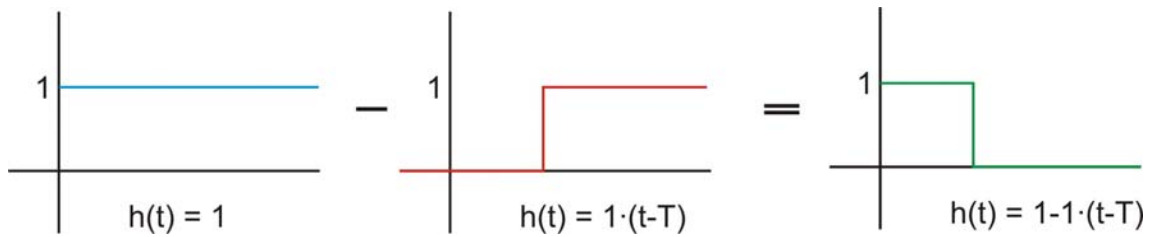
$$k = 2: \quad h(2T + \tau) = x(2T) = 0;$$

Vemos que ya siempre nos quedaría 0. Esto quiere decir que para la entrada impulso, la salida del sistema sería 1 desde $t = 0$ hasta T y 0 el resto del tiempo.

Debemos representar $h(t)$ como una sola ecuación, mediante las ecuaciones anteriores la tenemos definida a trozos. La ecuación de $h(t)$ sería:

$$h(t) = 1 - 1 \cdot (t - T); \quad \text{para} \quad t \geq 0$$

Lo que tenemos es una señal que siempre vale 1 restada por una que vale 1 a partir de $t = T$.



Ahora pasaremos a calcular la Transformada de Laplace de la señal de entrada y salida. Para el caso de la señal de salida tenemos:

$$H(s) = L\{h(t)\} = L\{1 - 1 \cdot (t - T)\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-Ts} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

Esta sería la función de salida del retenedor pero en el dominio de Laplace.

La transformada de la entrada sería:

$$L\{x^*(t)\} = X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (x(kT) \cdot e^{-kTs}) = x(0) \cdot e^0 + x(T) \cdot e^{-Ts} + \dots = x(0) + 0 + 0 + \dots = 1$$

Tenemos que la función de transferencia del sistema es:

$$G_{h0}(s) = \frac{H(s)}{X^*(s)} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

Como vimos un muestreador no tiene función de transferencia ya que para distintas entradas podía dar la misma salida, sin embargo, el **sistema muestreador + retenedor** si posee función de transferencia, por ello, cada vez que tengamos un muestreador tendremos que tener un retenedor para poder calcular la función de transferencia y poder analizarlo.

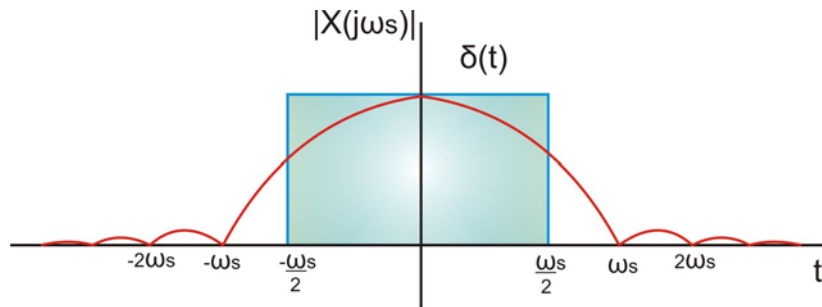
Teniendo la función de transferencia del retenedor podemos aproximar la señal de entrada $x(t)$.

Veremos como se comporta en frecuencia el retenedor calculado anteriormente.

Para ello, sustituiremos 's' por ' $j\omega$ ' quedando entonces:

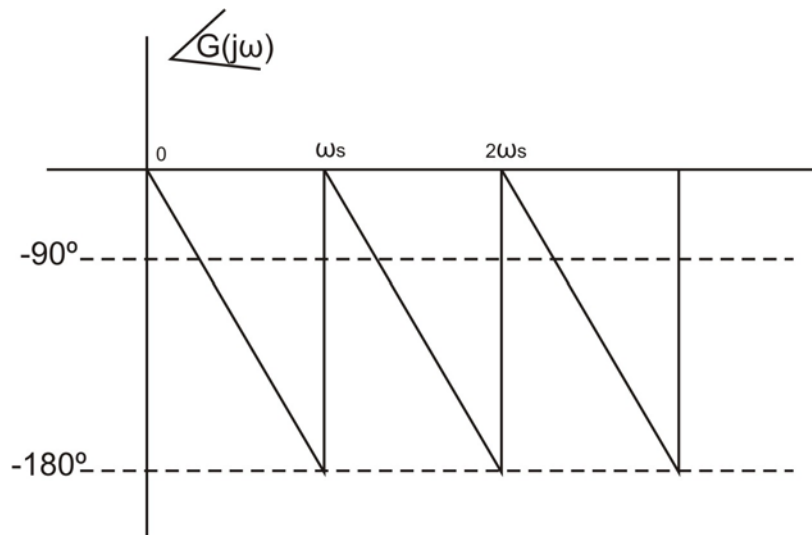
$$G_{h0}(j\omega) = \frac{1 - e^{-Tj\omega}}{j\omega}$$

Si representamos esta función en frecuencia vemos que no se comporta como el retenedor ideal.



La diferencia es que en frecuencia 0, sí vale la señal pero en la frecuencia $\frac{\omega_s}{2}$ vemos que no vale la ganancia que queríamos tener 'T' y para frecuencias mayores tampoco vale lo que queremos 0, esto supondrá que las distintas ganancias se irán sumando y produciendo un error, por eso en la realidad se emplea una frecuencia entre 10 y 20 veces la ω_s para alejar las ganancias lo más posible de la señal original que queremos obtener.

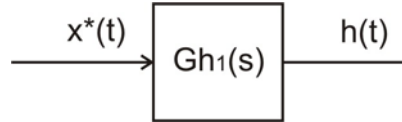
Si representamos el ángulo, vemos que el desfase va de -90 a -180° con respecto a la señal original, cosa que no queríamos.



Si tenemos un sistema que cambia lentamente, las señales de entrada tiene frecuencias muy bajas, el filtro de orden 0 es muy parecido al ideal. En cambio para señales de alta frecuencia debemos elegir un periodo de muestreo muy alto, para alejar las ganancias que introducen ruido.

Retenedor de Orden 1 (Hold 1)

La intención es calcular al igual que en el caso anterior la función de transferencia de un retenedor de Orden 1.



La situación es la misma que en el retenedor anterior, solo que en este caso la ecuación es la de una recta.

$$h(kT + \tau) = a_1 \cdot \tau + x(kT) = \frac{x(kT) - x((k-1) \cdot T)}{T} \cdot (\tau - kT) + x(kT)$$

$$\text{para } 0 \leq \tau < T$$

Nota: Para calcular a_1 habría que coger 2 puntos y aplicar la ecuación de la recta.

Con la ecuación del mantenedor de orden 1:

$$h(kT + \tau) = \frac{x(kT) - x((k-1) \cdot T)}{T} \cdot (\tau - kT) + x(kT) \text{ veremos como se comporta ante}$$

una señal de entrada escalón ($x(t) = 1$ para $t \geq 0$) en los instantes:

$$k = 0; \quad h(\tau) = \frac{x(0) - x(-T)}{T} \cdot \tau + x(0) = \frac{1}{T} \cdot \tau + 1$$

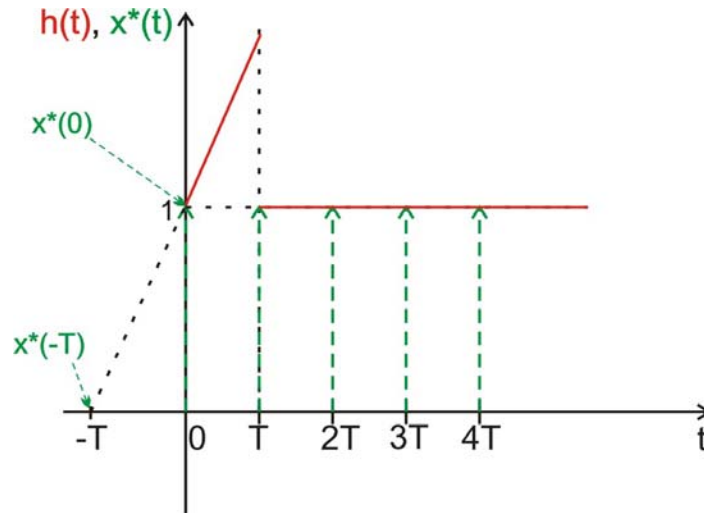
sabiendo que $x(0) = 1$ y $x(-T) = 0$

$$k = 1; \quad h(T + \tau) = \frac{x(T) - x(0)}{T} \cdot (\tau - T) + x(T) = 1;$$

en este caso da lo mismo que el anterior porque $x(T) = 1$ y $x(0) = 1$

$$k = 2, 3, \dots; \quad h(T + \tau) = 1$$

Representando la gráfica vemos que para todos los periodos de muestreo la señal vale 1, además el retenedor ya no es un valor que se mantiene constante, es una recta definida por dos puntos, el actual y el anterior de la muestra.



Observamos que en este caso, si hubiésemos usado un hold 0 tendríamos exactamente la señal escalón, pero esto es solo un caso particular, en general, siempre cuanto mayor orden tenga el retenedor, mas fiel será la reproducción de la señal de entrada.

Ahora una vez definida la función a trozos, tenemos que representar la ecuación en el dominio del tiempo $h(t)$:

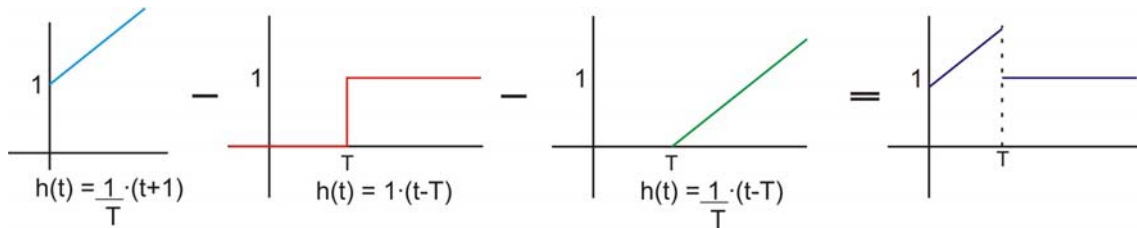
$$h(t) = \frac{1}{T} \cdot t + 1$$

Si solo ponemos esta ecuación, la señal sería una rampa infinita en T , tenemos que quitarle el pico, para ello, restamos la expresión $1 \cdot (t-T)$ a la ecuación anterior, quedando:

$$h(t) = \frac{1}{T} \cdot t + 1 - 1 \cdot (t - T)$$

Con esto quitaríamos el pico, pero de T en adelante seguiríamos teniendo una rampa, para ello, le restamos exactamente la misma rampa pero de T en adelante, restamos a la expresión anterior $\frac{1}{T} \cdot (t - T)$ quedando entonces la expresión en el dominio **del tiempo**:

$$h(t) = \frac{1}{T} \cdot t + 1 - 1 \cdot (t - T) - \frac{1}{T} \cdot (t - T)$$



Como tenemos h(t) vamos a calcular H(s):

$$H(s) = L\{h(t)\} = L\left\{\frac{1}{T} \cdot t\right\} + L\{1\} - L\{1 \cdot (t - T)\} - L\left\{\frac{1}{T} \cdot (t - T)\right\}$$

$$H(s) = \frac{1}{T \cdot s^2} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-Ts} - \frac{1}{T \cdot s^2} \cdot e^{-Ts}$$

Sumando todos los términos tendremos:

$$H(s) = \frac{(1 + T \cdot s - T \cdot s \cdot e^{-Ts} - e^{-Ts})}{T \cdot s^2} = \frac{1 + T \cdot s - e^{-Ts} (1 + T \cdot s)}{T \cdot s^2} = \frac{(1 + T \cdot s)(1 - e^{-Ts})}{T \cdot s^2}$$

Recordemos que $G_{hl}(s) = \frac{H(s)}{X^*(s)}$, ya tenemos H(s) ahora calcularemos X*(s).

La señal de entrada es la señal escalón, teniendo en cuenta esto, la expresión nos queda:

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot e^{-kTs} = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + e^{-3Ts}$$

Vemos que en este caso la expresión obtenida no nos sirve, para pasarlo a una sola expresión, podemos calcular el **lim** cuando tiende a infinito y ver en que converge, o a través de la tabla de transformadas aplicando el cambio $s = \ln z / T$, de donde se obtiene que $z = e^{Ts}$

En la tabla vemos que:

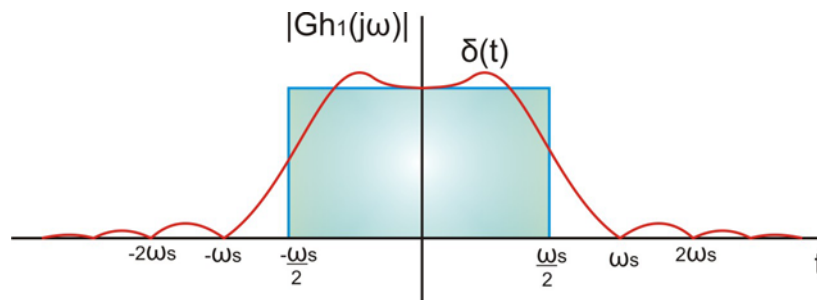
$$x(t) = 1(t) \rightarrow x(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \rightarrow X^*(s) = X(z) \Big|_{z=e^{Ts}} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}$$

Ahora que ya tenemos la transformada * de la entrada, podemos calcular la función de transferencia del sistema.

$$G_{hl}(s) = \frac{H(s)}{X^*(s)} = \frac{(1 + T \cdot s)(1 - e^{-Ts})}{T \cdot s^2} \cdot (1 - e^{-Ts}) = \frac{(1 + T \cdot s) \cdot (1 - e^{-Ts})^2}{T \cdot s^2} = \frac{1 + T \cdot s}{T} \cdot \frac{(1 - e^{-Ts})^2}{s}$$

Con la función de transferencia, hacemos el cambio $s = j\omega$ y representamos la respuesta del sistema en frecuencia para ver como se comportaría respecto al mantenedor ideal.

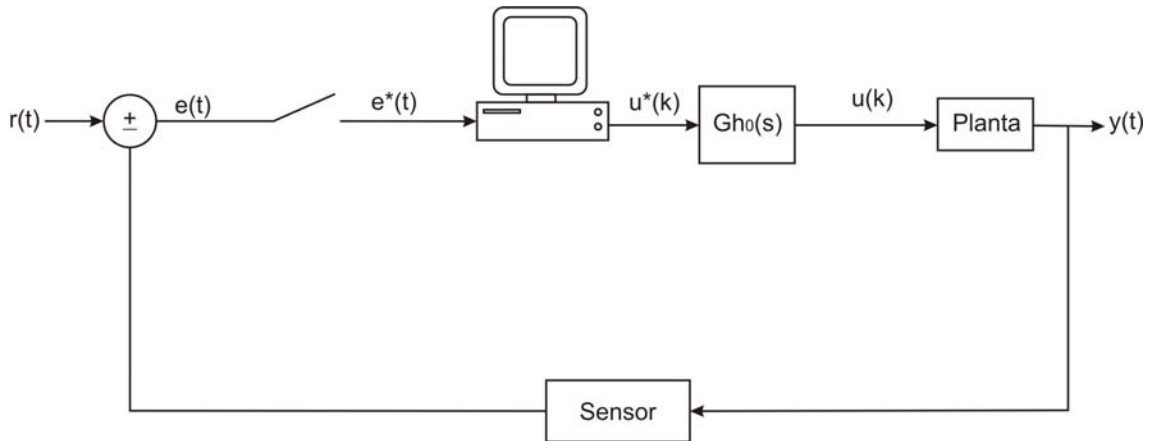
$$G_{hl}(j\omega) = \frac{1 + j \cdot \omega \cdot T}{T} \cdot \frac{(1 - e^{-j\omega T})^2}{j\omega}$$



Vemos que es muy parecida al Hold 0, con la diferencia de los picos de resonancia que posee cerca de la frecuencia 0. Esta es la razón por la que no se suele usar, es demasiado complejo de construir para obtener una ganancia muy parecida al Hold 0.

Nota: En los ejercicios, la función de transferencia nos la dan.

Sistemas de Control



En los sistemas de control tenemos elementos que trabajan con señales continuas, discretas y híbridos, por ello, para trabajar con este tipo de sistemas será necesario emplear una combinación de todas las técnicas vistas hasta el momento. Estas son:

- Transformada de Laplace para tiempo continuo
- Transformada Z para tiempo discreto.

Lo que haremos será pasar todo a tiempo continuo o todo a tiempo discreto mediante la relación vista anteriormente: $s = \ln z / T$ ó $z = e^{Ts}$

Si la señal de entrada continua tiene un polo, la señal muestreada tendrá infinitos polos, por ello, si tratamos las cosas desde el punto de vista continuo, tendremos muchos inconvenientes. Lo que haremos será pasar todo a tiempo discreto para trabajar sólo con la transformada Z.

Si recordamos, la función de transferencia en Z, es la transformada Z de la salida dividida por la transformada Z de la entrada, pero como vemos, la señal de salida es continua y no podemos calcular la transformada. Lo que haremos es suponer que en la salida tenemos un muestreador, ya que la salida sólo nos interesa en los instantes de muestreo, por tanto obtendremos la señal de salida muestreada con este muestreador ficticio y luego haremos la transformada Z de la expresión. En el caso de la entrada, poseemos la señal de error muestreada que depende de la entrada, por tanto es como si estuviese muestreada y podemos calcular la transformada Z sin problemas.

A partir de aquí, veremos los distintos casos paso a paso para entenderlo todo mejor.

Función De Transferencia Pulso De Sistemas Muestreados

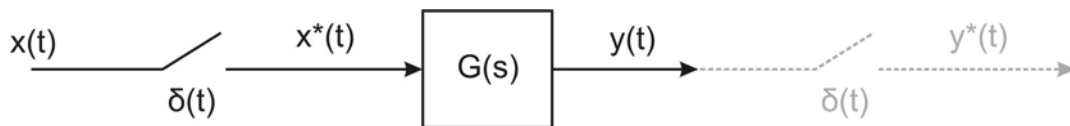
Función de transferencia Pulso: La relación de la transformada Z de la salida en los instantes de muestreo y la transformada Z de la entrada muestreada.

Sistemas en Lazo Abierto

(La salida no afecta a la entrada, no tiene realimentación)

Sistemas Continuos

Ejemplo: Tenemos un muestreador y un sistema continuo. Para hallar la función de transferencia pulso tenemos que hallar la transformada Z de la salida y de la entrada. Las condiciones iniciales son 0. Como solo nos interesa la salida en los instantes de muestreo, colocamos un muestreador ficticio para indicarlo.



Esto presenta el inconveniente de que no conoceremos la salida en los instantes de muestreo. Podemos hacer esto porque el sistema no cambia.

Ahora si podemos calcular la transformada Z.

Calculamos las señales desde el punto de vista de Laplace:

$$x(t) = X(s), \quad x^*(t) = X^*(s), \quad y(t) = Y(s), \quad y^*(t) = Y^*(s).$$

Indicamos todas las relaciones entre las señales:

$$Y(s) = G(s) \cdot X^*(s)$$

$$Y^*(s) = [G(s) \cdot X^*(s)]^*$$

Nota: el * indica que la señal es muestreada, en este caso, la expresión entre corchetes. Si tenemos un producto de una función de transferencia ordinaria por una función estrella, todo ello muestreado es igual a la señal muestreada por la transformada estrella de las ordinarias:

$$**Ejemplo:** \quad [G(s) \cdot X^*(s) \cdot E^*(s) \cdot H(s)]^* = X^*(s) \cdot E^*(s) \cdot [G(s) \cdot H(s)]^*$$

Esta propiedad se explica a continuación, aunque no es necesario saber demostrarla:

Tenemos $Y^*(s) = [G(s) \cdot X^*(s)]^*$

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(s + j\omega_s k)$$

luego sustituyendo en la fórmula

$$\frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(s + j\omega_s k) \cdot X^*(s + j\omega_s k); \text{ una de las propiedades de la transformada } ^*$$

era que era periódica en $s + j\omega_s k$ con $\omega_s = \frac{2 \cdot \pi}{T}$

Sustituyendo esto en la ecuación tendremos:

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(s + j\omega_s k) \cdot X^*(s)$$

como $X^*(s)$ ya no depende de k , se puede sacar fuera como constante quedando:

$$Y^*(s) = X^*(s) \cdot \left\{ \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(s + j\omega_s k) \right\}$$

comparando la expresión entre llaves con la propiedad expuesta anteriormente vemos que es igual a $G^*(s)$ quedando entonces:

$$\mathbf{Y^*(s) = X^*(s) \cdot G^*(s)}$$

Entonces tendremos que:

$$Y^*(s) = X^*(s) \cdot [G(s)]^* = X^*(s) \cdot G^*(s)$$

Pasamos de transformada * a transformada Z haciendo el cambio de variable:

$$Y(z) = X(z) \cdot G(z) \rightarrow \text{obtenemos la función de transferencia como: } G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Una de las cosas que teníamos en el ejemplo anterior era que partíamos de una función de transferencia en s y obteníamos una en z , este cambio lo logramos a partir de la transformada estrella y al hacer el cambio de variable $s = \frac{\ln z}{T}$, este cambio hay cuatro formas de hacerlo:

1. Aplicar la definición de transformada * y hacer el cambio de variable $s = \frac{\ln z}{T}$.

Habría que estudiar la convergencia del sumatorio y sacar una expresión en forma de polinomio (muy difícil)

2. $G^*(s) = \sum_{\text{polos}} \left[\text{residuo de } \frac{G(s) \cdot z}{z - e^{Ts}} \text{ en un polo de } G(s) \right]$, esta forma aparecía de la

convolución. Esto requiere multiplicar $G(s)$ por la expresión, sacar los residuos y los polos... (es mas factible que la anterior pero no aprovecha las tablas. Tampoco vamos a usarlo. Un ejemplo se encuentra en Ogata pags 85 y 86)

3. Teniendo la función $G(s)$ en el dominio de Laplace, podemos pasarla al dominio del tiempo $g(t)$ mediante la transformada inversa, y luego mediante un muestreo intermedio obtener la transformada Z . Hacer $L^{-1}\{G(s)\}$ y $Z\{g(t)\} \rightarrow G(z)$. Es demasiado complejo y además no usa las tablas directamente, las usa en pasos intermedios para calcular las transformadas, pero implica tener que calcular residuos, polos ...
4. En las tablas tenemos la equivalencia entre Laplace y Z . Lo que haremos será dividir $G(s)$ en fracciones simples y usando la equivalencia $s \rightarrow z$ de las tablas sacaremos $G(z)$ directamente. Esta será la técnica que usaremos

Haremos el ejemplo de Ogata pero usando esta última técnica para poder compararlas.

Ejemplo 1. $G(s) = \frac{1}{(s^2 \cdot (s+1))} \rightarrow \text{¿}G(z)\text{?}$

Dividiremos $G(s)$ en funciones parciales, a diferencia de la transformada Z , en la que calculábamos las fracciones simples de $\frac{Y(z)}{z}$, en s calculamos directamente los residuos de $G(s)$.

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 \cdot (s+1))} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s}$$

$$A = \frac{1}{s^2 \cdot (s+1)} \cdot (s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{(-1)^2} = 1$$

$$B = \frac{1}{s^2 \cdot (s+1)} \cdot s^2 \cdot \frac{1}{(1-1)!} \Big|_{s=0} = 1$$

$$C = \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{(s+1)} \cdot \frac{1}{(2-1)!} \Big|_{s=0} = -1 \cdot (s+1)^{-2} \cdot 1 \cdot 1 \Big|_{s=0} = -1$$

Sustituyendo las letras por sus respectivos valores tendremos la división en fracciones simples:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}$$

Ahora mirando en las tablas obtenemos las transformadas directamente:

$$G(s) = Z\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + Z\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - Z\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

$$Z\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \rightarrow \text{fila 4} \rightarrow \frac{1}{(1 - e^{-T} \cdot z^{-1})}$$

$$Z\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \rightarrow \text{fila 5} \rightarrow \frac{T \cdot z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

$$Z\left\{\frac{1}{s}\right\} \rightarrow \text{fila 3} \rightarrow \frac{1}{(1 - z^{-1})}$$

Ya tenemos la expresión de $G(z)$:

$$G(z) = \frac{1}{(1 - e^{-T} \cdot z^{-1})} + \frac{T \cdot z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{1}{(1 - z^{-1})}$$

No nos conviene tenerlo como suma de polinomios, por ello, realizamos la suma:

$$G(z) = \frac{(1-z^{-1})^2 + T \cdot z^{-1} \cdot (1-e^{-T} \cdot z^{-1}) - (1-e^{-T} \cdot z^{-1}) \cdot (1-z^{-1})}{(1-z^{-1})^2 \cdot (1-e^{-T} \cdot z^{-1})}$$

$$G(z) = \frac{(1+z^{-2} - 2 \cdot z^{-1}) + T \cdot z^{-1} - T \cdot e^{-T} \cdot z^{-2} - 1 + z^{-1} + e^{-T} \cdot z^{-1} - e^{-T} \cdot z^{-2}}{1 + z^{-2} - 2 \cdot z^{-1} - e^{-T} \cdot z^{-1} - e^{-T} \cdot z^{-3} + 2 \cdot e^{-T} \cdot z^{-2}}$$

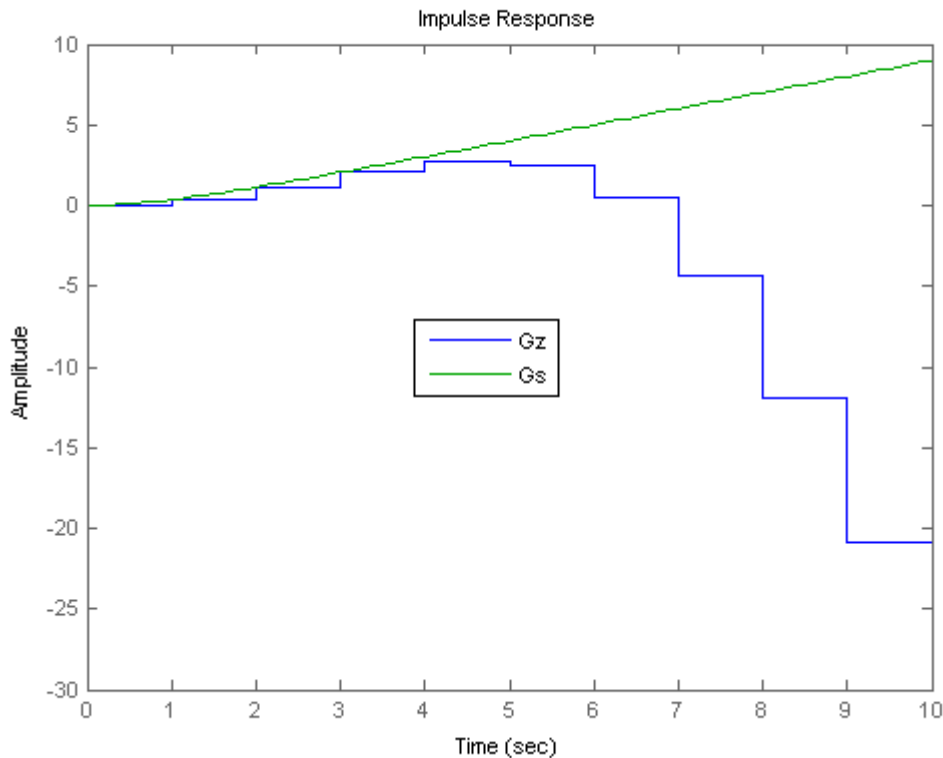
Simplificamos el numerador y agrupamos los términos por coeficiente de la z:

$$G(z) = \frac{z^{-2} \cdot (1 - T \cdot e^{-T} - e^{-T}) + z^{-1} \cdot (-1 + T + e^{-T})}{e^{-T} \cdot z^{-3} + z^{-2} \cdot (1 + 2 \cdot e^{-T}) - z^{-1} \cdot (2 + e^{-T}) + 1}$$

Pasamos a exponente positivo:

$$G(z) = \frac{z \cdot (1 - T \cdot e^{-T} - e^{-T}) + z^2 \cdot (-1 + T + e^{-T})}{e^{-T} + z \cdot (1 + 2 \cdot e^{-T}) - z^2 \cdot (2 + e^{-T}) + z^3}$$

Para comprobar que esto es correcto, lo representaremos en MatLab. Para ello, le aplicamos un impulso a $G(s)$ y luego a $G(z)$ y veremos que sale lo mismo, debemos representarlo para un periodo de muestreo $T = 1$; (cc_011.m)



Función de Transferencia pulso de sistemas con términos: e^{-nTs}

($n= 0, 1, 2, 3...$)

Recordemos que en las funciones de transferencia de los mantenedores de orden 0 y 1 tenemos este tipo de términos.

Imaginemos un sistema de este estilo:

$$G(s) = H(s) \cdot F^*(s)$$

$$F^*(s) = f_0 + f_1 \cdot e^{-Ts} + f_2 \cdot e^{-2Ts} \dots; \text{ con } f_1, f_2 \dots \text{ constantes.}$$

$$G^*(s) = [H(s) \cdot F^*(s)]^* = F^*(s) \cdot H^*(s) \rightarrow \text{pasando a } Z \rightarrow G(z) = F(z) \cdot H(z);$$

Como sabemos la forma que tienen la función F, podemos calcular F(z) como:

$$F(z) = F^*(s) \Big|_{s=\frac{\ln z}{T} \rightarrow z=e^{Ts}} = f_0 \cdot z^{-1} + f_1 \cdot z^{-2} + f_2 \cdot z^{-3} \dots$$

Si tenemos un término e^{-nTs} al hacer la conversión podemos sustituirlo por z^{-n} .

En general descomponemos G(s) en dos partes, una la correspondiente a F*(s), en la que aplicamos la transformación descrita y la otra la correspondiente a H(s) que se resuelve mediante los métodos estudiados.

Si tenemos $Gh_0(s) \cdot G(s) = \frac{(1 - e^{-Ts})}{s} \cdot G(s)$ = agrupando las e por un lado y el resto por

otro = $(1 - e^{-Ts}) \cdot \frac{G(s)}{s}$; el primer término sería F*(s) y el otro H(s) luego:

$$Z\{Gh_0 \cdot G(s)\} = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

en este caso en el primer término hemos aplicado la transformación directa, el segundo habría que calcularlo.

Comandos MatLab para trabajar con funciones discretas y continuas:

>>Gz = c2d(Gs,T,'metodo') → pasa un sistema de tiempo continuo a tiempo discreto

>>Gs = d2c(Gz,'metodo') → realiza la operación inversa a la anterior

Nota: *método* es uno de los siguientes:

‘zoh’(mantenedor de orden 0),

‘foh’ (mantenedor de orden 1)

>>Gz2 = d2d(Gz1, T) → muestrea un sistema discreto con otro tiempo de muestreo distinto.

Definir función de transferencia en tiempo continuo es igual que en discreto pero sin indicar el periodo de muestreo. Para introducir un retardo usamos los siguientes parámetros en la función que genera la función de transferencia del sistema:

‘inputdelay’,Tr

‘outputdelay’,Tr

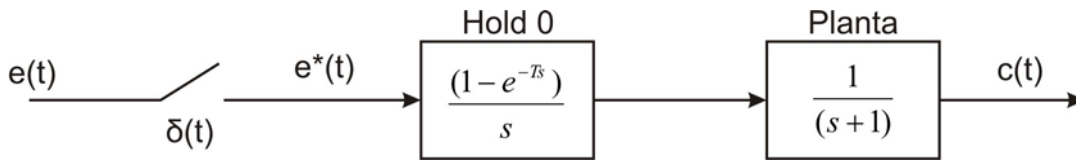
‘variable’,’z⁻¹’ → puede pasar las z de exponente positivo a negativo y viceversa

Donde **Tr** es el retardo;

>>Set(G) → una vez definida G, aparecen los valores que podemos cambiarle

El siguiente ejemplo lo haremos a mano y en MatLab.

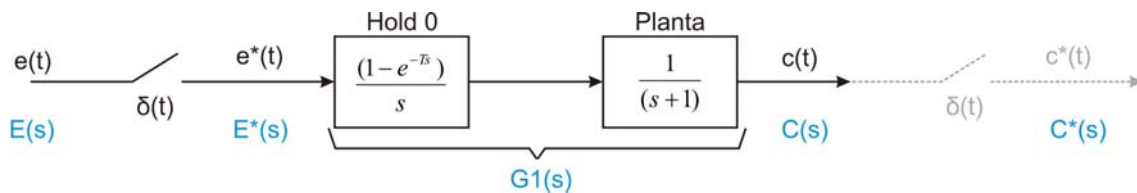
Ejemplo 1. Obtener la Función de transferencia pulso del siguiente sistema y calcular su salida para una entrada escalón:



Pasos a seguir:

- 1.- Colocamos el muestreador ficticio en la salida para poder calcular la función de transferencia en los instantes de muestreo que son los que nos interesan.
- 2.- Ponemos las señales en el dominio de Laplace para que nos sea más fácil
- 3.- Llamaremos $G1(s)$ al producto del Hold 0 y la planta:
- 4.- Calculamos la salida:

Solución:



$$C(s) = E^*(s) \cdot G1(s)$$

Lo que nos interesa es la salida muestreada, por tanto obtenemos:

$$C^*(s) = [E^*(s) \cdot G1(s)]^*$$

que según la propiedad vista

$$E^*(s) \cdot [G1(s)]^* = E^*(s) \cdot G^*(s)$$

quedando entonces la función de transferencia (salida partida por entrada) como:

$$G1^*(s) = \frac{C^*(s)}{E^*(s)}$$

Ahora que ya tenemos todo como transformada *, podemos pasar a transformada Z:

$$G1(z) = \frac{C(z)}{E(z)}$$

La transformada Z de $G1(s)$ sería entonces:

$$G1(z) = Z\{G1(s)\} = Z\left\{\frac{(1 - e^{-Ts})}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)}\right\}$$

esto no sería la transformada de cada factor, sino la transformada del producto, si tuviésemos un muestreador entre las dos funciones, sí sería la transformada de cada factor.

$$G1(z) = Z\left\{\frac{(1 - e^{-Ts})}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)}\right\}$$

según la propiedad vista antes, si llamamos $F^*(s) = (1 - e^{-Ts})$ y $H(s) = \frac{1}{s \cdot (s+1)}$;

realizando el cambio obtenemos:

$$G1(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left\{\frac{1}{s \cdot (s+1)}\right\}$$

Para resolver la transformada que nos queda, dividimos en fracciones simples:

$$\frac{1}{s \cdot (s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)}$$

$$A = \frac{1}{s \cdot (s+1)} \cdot s \Big|_{s=0} = 1$$

$$B = \frac{1}{s \cdot (s+1)} \cdot (s+1) \Big|_{s=-1} = -1$$

Una vez resuelto esto, tenemos que:

$$Z\left\{\frac{1}{s \cdot (s+1)}\right\} = Z\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)}\right\}; \text{ sustituyendo en la ecuación:}$$

$$G1(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \left(Z\left\{\frac{1}{s}\right\} - Z\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} \right) = (1 - z^{-1}) \cdot \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-T}} \right)$$

Pasamos todos los exponentes a positivos o a negativos, los pasaremos a positivo en este caso:

$$G1(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} \right)$$

realizando el producto:

$$G1(z) = 1 - \frac{(z-1) \cdot z}{(z-e^{-T}) \cdot z} = 1 - \frac{(z-1)}{(z-e^{-T})}$$

realizando la suma:

$$G1(z) = \frac{z-e^{-T} - (z-1)}{(z-e^{-T})} = \frac{(1-e^{-T})}{(z-e^{-T})}$$

Con esto hemos obtenido la función de transferencia pulso del sistema

Ahora calcularemos la salida para una entrada escalón discreta:

$$G1(z) = \frac{C(z)}{E(z)}$$

queremos calcular la salida

$$C(z) = G1(z) \cdot E(z)$$

si tenemos una entrada escalón, mirando las tablas, $E(z) = \frac{z}{(z-1)}$, realizando el

producto obtenemos la salida:

$$C(z) = \frac{z}{(z-1)} \cdot \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

nos piden la señal de salida en el dominio del tiempo, que se obtiene como la transformada Z^{-1} de la salida en Z , es decir:

$$c(kT) = Z^{-1}\{C(z)\}.$$

Para calcular la Z^1 dividimos por z y calculamos las fracciones simples:

$$\frac{C(z)}{z} = \frac{(1 - e^{-T})}{(z-1) \cdot (z - e^{-T})} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z - e^{-T})}$$

$$A = \frac{(1 - e^{-T})}{(z-1) \cdot (z - e^{-T})} \cdot (z-1) \Big|_{z=1} = 1$$

$$B = \frac{(1 - e^{-T})}{(z-1) \cdot (z - e^{-T})} \cdot (z - e^{-T}) \Big|_{z=e^{-T}} = -1$$

Ahora pasamos la z multiplicando y obtenemos:

$$C(z) = \frac{z}{(z-1)} - \frac{z}{(z - e^{-T})}$$

la primera expresión es la transformada z de la señal escalón y la segunda la encontramos en las tablas;

Calculando la Z^1 de las expresiones anteriores obtenemos la salida continua;

$$c(kT) = 1 - e^{-kT}$$

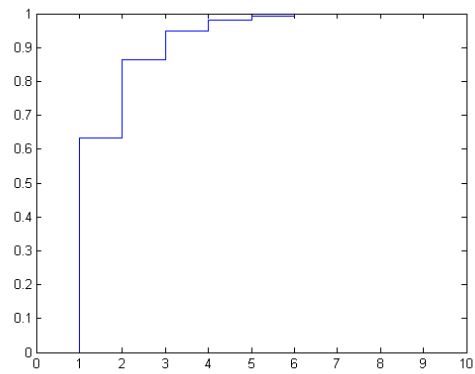
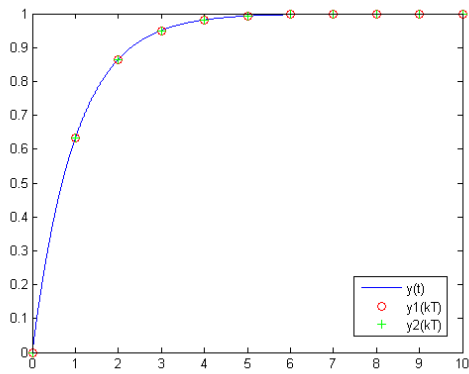
Para calcularlo en MatLab podemos hacer 3 cosas: (cc_012.m)

- 1.- Definimos el sistema en tiempo continuo $G(s) \rightarrow c2d \rightarrow G1(z) \rightarrow \text{step}(G1)$
- 2.- Definir directamente el sistema en tiempo discreto con la expresión calculada y lo simulamos.
- 3.- Definir la salida calculada $c = 1 - e^{-kT} \rightarrow \text{stem}(k*T, c)$, definiendo k previamente.

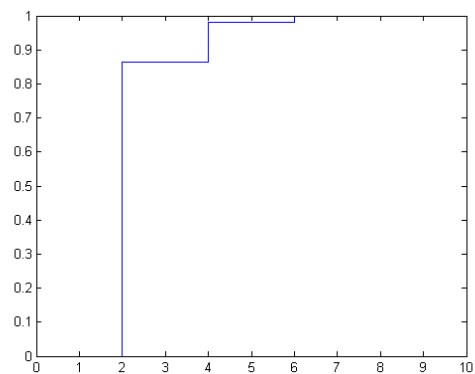
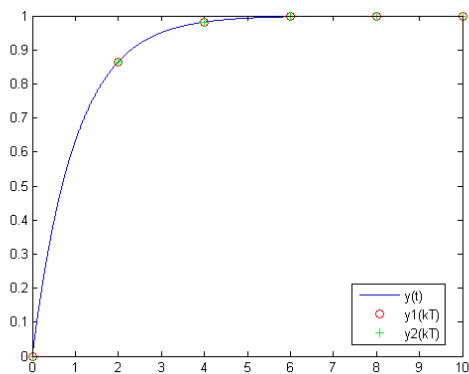
Lo haremos con tres periodos de muestreo distintos $T = 1$; $T = 2$; $T = 0.06$;

Nota: El periodo de muestreo tiene que ser entre 10 y 20 veces más grande que la constante de tiempo más lenta del sistema.

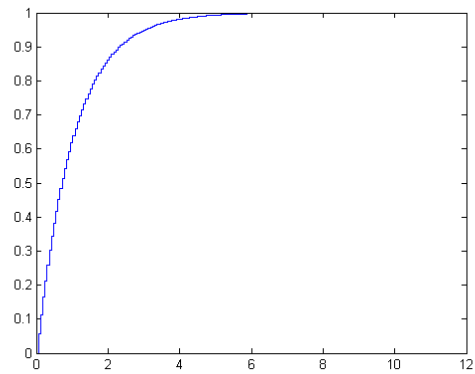
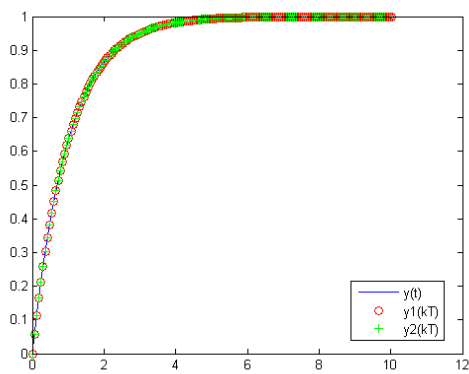
- $T = 1$ (Periodo de Muestreo justo)



- $T = 2$ (Periodo de Muestreo malo)



- $T = 0.06$ (Periodo de Muestreo bueno)



Constantes de tiempo de sistemas continuos

- **1^{er} orden:** $G(s) = \frac{k_0}{(\tau \cdot s + 1)}$; $\tau = \text{cte de tiempo} \rightarrow \frac{\tau}{10} < T_s < \frac{\tau}{20}$

- **2^o orden:** $G(s) = \frac{k_0 \cdot \omega_n}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$; $\omega_n = \text{frecuencia natural no}$

amortiguada $\rightarrow \frac{\pi}{5 \cdot \omega_n} \leq T_s \leq \frac{\pi}{10 \cdot \omega_n}$

Todo esto con $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$

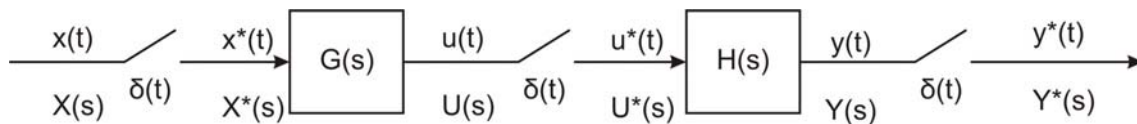
Demostremos que la transformada Z de un producto no es lo mismo que el producto de la transformada Z de los factores. Lo veremos con un ejemplo.

Ambos sistemas son iguales pero en el sistema primero tenemos un muestreador entre el hold y la planta, mientras que el segundo no.

Calcularemos la función de transferencia pulso de ambos sistemas y las compararemos. Una vez definida la expresión de la Función de Transferencia la

calcularemos dado: $G(s) = \frac{1}{s+a}$ y $H(s) = \frac{1}{s+b}$

Sistema 1:



No ponemos el muestreador ficticio porque la salida ya está muestreada. Calcularemos las ecuaciones:

1. $U(s) = G(s) \cdot X^*(s)$

2. $Y(s) = H(s) \cdot U^*(s)$

A partir de U obtenemos U^* :

$$U^*(s) = [G(s) \cdot X^*(s)]^* = G^*(s) \cdot X^*(s)$$

Sustituimos $U^*(s)$ en la ecuación 2:

$$Y(s) = H(s) \cdot G^*(s) \cdot X^*(s)$$

Nos falta la salida muestreada para poder calcular salida partido por entrada:

$$Y^*(s) = [H(s) \cdot G^*(s) \cdot X^*(s)]^* = H^*(s) \cdot G^*(s) \cdot X^*(s)$$

como ya tenemos todo en transformada estrella, podemos pasar al dominio de Z haciendo el cambio de variable:

$$Y(z) = H(z) \cdot G(z) \cdot X(z)$$

poniendo salida partido por entrada obtenemos la función de transferencia:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) \cdot G(z)$$

Calculamos el valor de la Función de Transferencia dado:

$$G(s) = \frac{1}{(s+a)} \quad H(s) = \frac{1}{(s+b)}$$

donde:

$$G(z) = Z\{G(s)\}$$

descomponemos en funciones simples y usamos las tablas, o usamos MatLab.

$$H(z) = Z\{H(s)\}$$

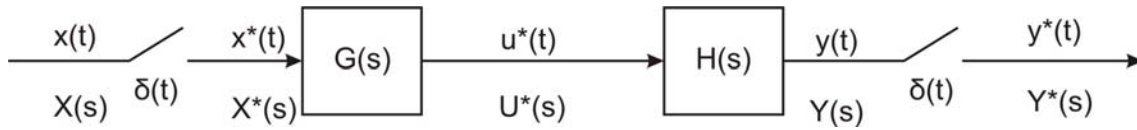
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = Z\left\{\frac{1}{(s+a)}\right\} \cdot Z\left\{\frac{1}{(s+b)}\right\} \rightarrow \text{mirando en las tablas obtenemos} \rightarrow$$

$$Z\left\{\frac{1}{(s+a)}\right\} = \frac{1}{(1 - e^{-aT} \cdot z^{-1})} \rightarrow \text{pasando a exponente positivo} \rightarrow \frac{z}{(z - e^{-aT})}$$

$$Z\left\{\frac{1}{(s+b)}\right\} = \frac{z}{(z - e^{-bT})}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) \cdot H(z) = \frac{z^2}{(z - e^{-aT}) \cdot (z - e^{-bT})}$$

Sistema 2:



Calculamos las ecuaciones:

$$1. U(s) = G(s) \cdot X^*(s)$$

$$2. Y(s) = H(s) \cdot U(s)$$

Sustituyendo 1 en 2

$$Y(s) = H(s) \cdot G(s) \cdot X^*(s)$$

necesitamos la señal de salida en los instantes de muestreo, la calculamos:

$$Y^*(s) = [H(s) \cdot G(s) \cdot X^*(s)]^* = [H(s) \cdot G(s)]^* \cdot X^*(s)$$

esta ecuación no es igual que la anterior, ya que aquí tenemos la transformada estrella de un producto, por lo que al pasarlo a transformada Z **NO** se divide en dos transformadas sino que se hace la transformada del producto

$$Y(z) = X(z) \cdot Z\{G(s) \cdot H(s)\}$$

Nota: $Z\{G(s) \cdot H(s)\} \rightarrow$ se suele notar como $GH(z)$ para referirnos a la transformada Z del producto de G por H.

Luego la Función de Transferencia será:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = GH(z)$$

En este caso, para hallar $GH(z)$ tenemos que realizar la multiplicación, luego descomponer el producto en fracciones simples y después calcular la transformada del producto.

Pasaremos ahora a calcular el valor de la Función de Transferencia dado:

$$G(s) = \frac{1}{(s+a)} \quad H(s) = \frac{1}{(s+b)}$$

En este caso, primero haremos el producto de $G(s)$ y $H(s)$:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{1}{(s+a) \cdot (s+b)}$$

con lo que la transformada será

$$Z \left\{ \frac{1}{(s+a) \cdot (s+b)} \right\}$$

como no aparece en las tablas lo descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(s+a) \cdot (s+b)} = \frac{A}{(s+a)} + \frac{B}{(s+b)}$$

Calculamos A y B :

$$A = \frac{1}{(s+a) \cdot (s+b)} \cdot (s+a) \Big|_{s=-a} = \frac{1}{-a+b} = \frac{-1}{a-b}$$

$$B = \frac{1}{(s+a) \cdot (s+b)} \cdot (s+b) \Big|_{s=-b} = \frac{1}{-b+a} = \frac{1}{a-b}$$

Nos queda entonces sustituyendo:

$$Z \left\{ \frac{1}{(s+a) \cdot (s+b)} \right\} = Z \left\{ \frac{A}{(s+a)} + \frac{B}{(s+b)} \right\} = Z \left\{ \frac{-1}{(a-b)(s+a)} + \frac{1}{(a-b)(s+b)} \right\}$$

sacando factor común

$$\frac{1}{(a-b)} \cdot Z \left\{ \frac{1}{(s+b)} - \frac{1}{(s+a)} \right\}$$

tenemos que la transformada Z de una suma **SI** es la transformada Z de los sumandos

$$\frac{1}{(a-b)} \cdot \left(Z \left\{ \frac{1}{(s+b)} \right\} - Z \left\{ \frac{1}{(s+a)} \right\} \right)$$

mirando en las tablas vemos que las transformadas son directas

$$\frac{1}{(a-b)} \cdot \left(\frac{z}{z - e^{-bT}} - \frac{z}{z - e^{-aT}} \right)$$

realizamos la resta para dejarlo en forma de función de transferencia:

$$\frac{1}{(a-b)} \cdot \left(\frac{z^2 - z \cdot e^{-aT} - z^2 + z \cdot e^{-bT}}{(z - e^{-bT}) \cdot (z - e^{-aT})} \right)$$

sacando factor común obtenemos:

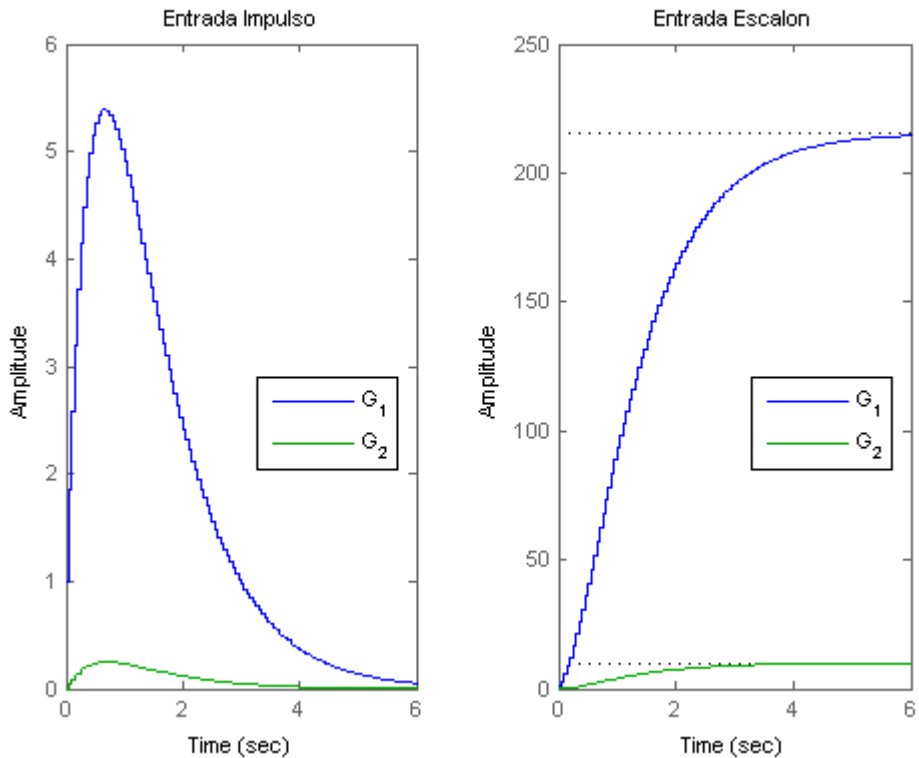
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{a-b} \cdot \left(\frac{z \cdot (e^{-bT} - e^{-aT})}{(z - e^{-bT}) \cdot (z - e^{-aT})} \right)$$

Vemos que las funciones de transferencia son totalmente distintas, para comprobarlo, ejecutaremos en MatLab (cc_013.m) ambos sistemas para una entrada escalón o impulso con los siguientes parámetros:

$$T = 0.05 \quad a = 1 \quad a = 2$$

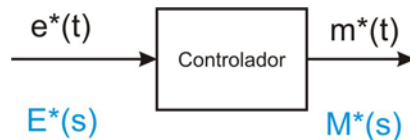
Como tenemos ambas funciones de transferencia en forma de productos usaremos `zpk` en lugar de `tf` para crear las funciones de transferencia.

Representaremos ambas transformadas tanto para una entrada escalón como para una entrada impulso.



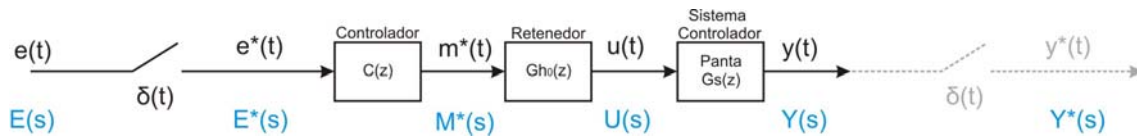
Sistemas con un Controlador Digital

El controlador digital es el elemento que realiza el algoritmo de control, es un dispositivo al que le entra una señal discreta y del que sale una señal también discreta. En cada instante de muestreo recibirá una entrada y calculará la salida para ese mismo instante de muestreo. Su función de transferencia será:



$$\frac{U^*(s)}{E^*(s)} = C^*(s) \quad \rightarrow \quad \text{pasamos a Z} \quad \rightarrow \quad C(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$$

Lo que haremos será diseñar esta función de transferencia una vez conocida la dinámica del sistema. Veremos como influye este nuevo elemento en un sistema que tenga todos los elementos estudiados hasta el momento. Calcularemos su función de transferencia pulso.



La señal discreta $m^*(t)$ tenemos que pasarla a continua antes de introducirla en la planta, ya que si introducimos una señal de muy alta frecuencia directamente en la planta afectaría a partes de la planta que no están modeladas, además no podríamos filtrar porque el ruido está en altas frecuencias. A parte de todo, nunca podríamos tener un muestreador sin un retenedor ya que por sí solo no tiene función de transferencia.

La función de transferencia pulso del sistema sería:

1. $M^*(s) = C^*(s) \cdot E^*(s)$
2. $U(s) = Gh_0(s) \cdot M^*(s)$
3. $Y(s) = U(s) \cdot G(s)$

Mediante las ecuaciones 1 y 2 obtenemos

$$U(s) = Gh_0(s) \cdot C^*(s) \cdot E^*(s)$$

Con esta ecuación y 3 obtenemos

$$Y(s) = G(s) \cdot Gh_0(s) \cdot C^*(s) \cdot E^*(s)$$

Tenemos la salida en continua, colocamos el muestreador ficticio y obtenemos la salida muestreada:

$$Y^*(s) = [G(s) \cdot Gh_0(s) \cdot C^*(s) \cdot E^*(s)]^* = [G(s) \cdot Gh_0(s)]^* \cdot C^*(s) \cdot E^*(s)$$

pasando a transformada Z

$$Y(z) = C(z) \cdot E(z) \cdot GGh_0(z) \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{Y(z)}{E(z)} = C(z) \cdot GGh_0(z)}$$

Nota: Notar que siempre tendremos la expresión del retenedor por la planta, ya que lo necesitamos antes de ésta. Como siempre tendremos un retenedor de orden 0 o de orden 1 tendremos:

$$Gh_0(s) = \frac{(1 - e^{-T \cdot s})}{s}$$

al multiplicar por la planta tendremos

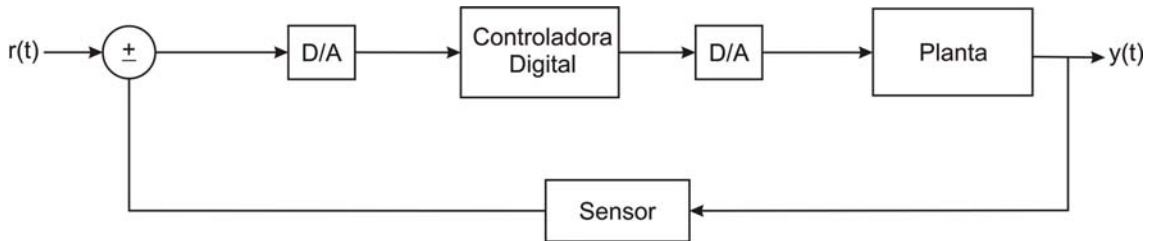
$$Z \left\{ \frac{1 - e^{-T \cdot s}}{s} \cdot G(s) \right\}$$

usando la transformación $e^{Ts} = z$ obtenemos

$$Z \left\{ (1 - e^{-T \cdot s}) \cdot \frac{G(s)}{s} \right\} = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$$

de manera que solo tendríamos que hacer la transformada Z de la planta partida por 's'

Sistemas en Lazo Cerrado



Aunque los sistemas vistos hasta ahora son en lazo abierto, en realidad nunca tendremos un sistema de este tipo, serán de lazo cerrado. En este caso, la salida afectará a la entrada del sistema, tendremos una señal de error que será la diferencia entre la señal de salida y la señal referencia que queremos.

La realimentación es necesaria porque los sistemas no son perfectos, son aproximaciones que contienen errores, y por tanto la planta tendrá errores que si no realimentamos podría acumularse hasta llegar a ser peligroso. Con la realimentación conseguimos que la salida sea exactamente la que queremos para una entrada o con un error muy pequeño que conoceremos.

Lo más importante que nos proporciona la realimentación es la Estabilidad (siempre hablamos de realimentación negativa, el error va siendo cada vez menor.).

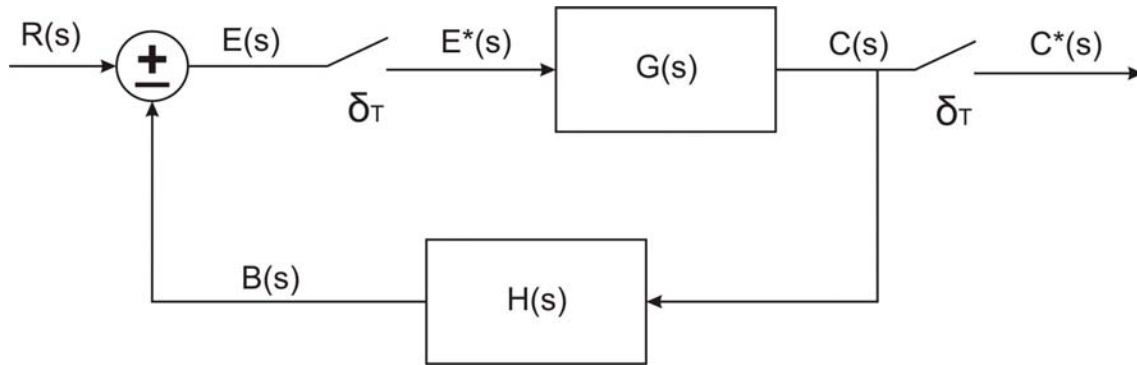
También nos va a permitir reducir la sensibilidad. Si en uno de los componentes tenemos un pequeño fallo ¿cómo afectaría al sistema?, si no tenemos realimentación el fallo se propaga por todo el sistema, con la realimentación atenuamos este error, por ejemplo si la planta fuese un motor, se iría desgastando y dando lugar a un pequeño error.

Veremos la función de transferencia Pulso de algunos sistemas típicos (Fotocopia). En cada uno de ellos, obtendremos las ecuaciones e intentaremos obtener $C^*(s)$, una vez obtenido lo pasamos a Z y dividimos “salida / entrada” ($C(z) / R(z)$) para obtener la función de transferencia.

En los dos últimos sistemas de la fotocopia tenemos una peculiaridad, esto sucede porque no tenemos un muestreador en la entrada de $G(s)$ y por tanto no nos queda $R(z)$ sola y por tanto no podemos poner “salida / entrada”, ya que nos queda $G_1R(z)$ y $GR(z)$ respectivamente. Por tanto no tendríamos la función de transferencia pulso y no podremos realizar los análisis que se explicarán en próximos temas. Como los sistemas los diseñaremos nosotros, nunca se dará esta situación, casi siempre usaremos uno de los dos primeros, principalmente el primero.

Evaluaremos tres sistemas en lazo cerrado:

Sistema 1:



$$G(s) = Gh_0(s) \cdot G_1(s)$$

$$1.- E(s) = R(s) - B(s)$$

$$2.- C(s) = G(s) \cdot E^*(s)$$

$$3.- B(s) = C(s) \cdot H(s)$$

De las ecuaciones 1 y 3 obtenemos:

$$E(s) = R(s) - C(s) \cdot H(s)$$

Como queremos obtener $C^*(s)$ muestreamos esta fórmula:

$$E^*(s) = [R(s) - C(s) \cdot H(s)]^* = R^*(s) - [C(s) \cdot H(s)]^*$$

Al no poder obtener $C^*(s)$ ya que tenemos un producto muestreado, hay que seguir operando, para ello, sustituiremos $C(s)$ por su valor de la fórmula 2:

$$E^*(s) = R^*(s) - [G(s) \cdot E^*(s) \cdot H(s)]^* = R^*(s) - E^*(s) \cdot [G(s) \cdot H(s)]^*$$

Despejamos $E^*(s)$ y sustituimos en la fórmula 2 muestreada para poder obtener $C^*(s)$:

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + [G(s) \cdot H(s)]^*}$$

la fórmula 2 muestreada sería igual a: $C^*(s) = G^*(s) \cdot E^*(s)$ sustituyendo la expresión anterior en esta fórmula obtenemos $C^*(s)$ y podremos sustituir directamente por $C(z)$:

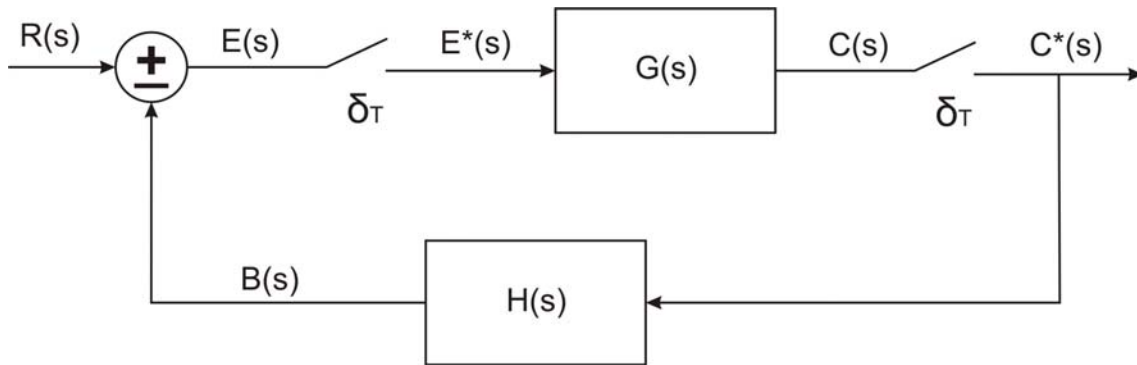
$$C^*(s) = \frac{G^*(s) \cdot R^*(s)}{1 + [G(s) \cdot H(s)]^*}$$

como todos los términos están en forma de transformada *, podemos realizar la conversión directa a Z y dividiendo salida entre entrada obtener la Función de transferencia Pulso del sistema:

$$C(z) = \frac{G(z) \cdot R(z)}{1 + GH(z)} \quad \rightarrow \quad \boxed{G_{LC}(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}}$$

Recordar que GH(z) se refiere a la transformada Z del producto de la función G por la función H. G_{LC} se refiere a la función de transferencia en Lazo Cerrado del sistema.

Sistema 2:



- 1.- $E(s) = R(s) - B(s)$
- 2.- $C(s) = E^*(s) \cdot G(s)$
- 3.- $B(s) = C^*(s) \cdot H(s)$

De las ecuaciones 1 y 3 obtenemos:

$$E(s) = R(s) - C^*(s) \cdot H(s)$$

Como queremos obtener $C^*(s)$ muestreamos esta fórmula:

$$E^*(s) = [R(s) - C^*(s) \cdot H(s)]^* = R^*(s) - C^*(s) \cdot H^*(s)$$

Como hemos conseguido obtener $C^*(s)$, sustituimos $E^*(s)$ en la formula 2:

$$C(s) = G(s) \cdot (R^*(s) - C^*(s) \cdot H^*(s))$$

Realizamos el producto por G(s) y muestreamos la fórmula ya que en el término de la izquierda tenemos todavía C(s):

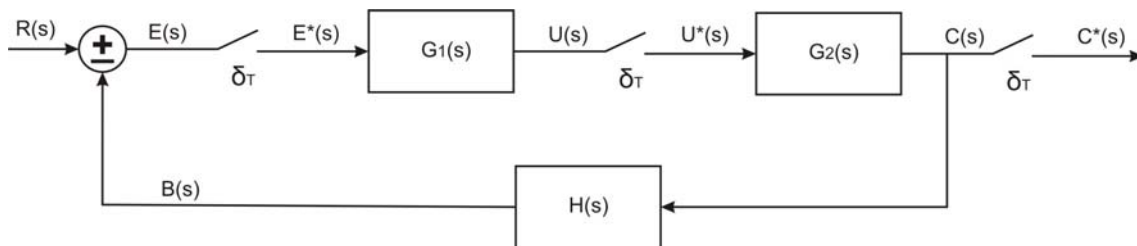
$$C(s) = G(s) \cdot R^*(s) - G(s) \cdot C^*(s) \cdot H^*(s) \xrightarrow{*} C^*(s) = G^*(s) \cdot R^*(s) - G^*(s) \cdot C^*(s) \cdot H^*(s)$$

Despejamos $C^*(s)$ y como tenemos todo en forma de transformada * pasamos a transformada Z directamente para obtener la Función de Transferencia (F.T. de aquí en adelante)

$$C^*(s) = \frac{G^*(s) \cdot R^*(s)}{1 + G^*(s) \cdot H^*(s)} \xrightarrow{z} C(z) = \frac{G(z) \cdot R(z)}{1 + G(z) \cdot H(z)}$$

$$G_{LC}(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z) \cdot H(z)}$$

Sistema 3:



En este caso $G_2(s)$ podría ser la planta con su retenedor y $G_1(s)$ un controlador analógico para que si falla el computador el sistema siga funcionando.

1.- $E(s) = R(s) - B(s)$

2.- $B(s) = H(s) \cdot C(s)$

3.- $U(s) = E^*(s) \cdot G_1(s)$

4.- $C(s) = U^*(s) \cdot G_2(s)$

De las ecuaciones 1 y 2 obtenemos:

$$E(s) = R(s) - H(s) \cdot C(s)$$

Muestreamos ahora las ecuaciones 3 y 4:

$$U^*(s) = [E^*(s) \cdot G_1(s)]^* = E^*(s) \cdot G_1^*(s)$$

$$C^*(s) = [U^*(s) \cdot G_2(s)]^* = U^*(s) \cdot G_2^*(s)$$

De estas dos ecuaciones, sustituyendo $U^*(s)$ por su valor obtenemos la siguiente ecuación:

5.- $C^*(s) = E^*(s) \cdot G_1^*(s) \cdot G_2^*(s)$

Como queremos obtener $C^*(s)$ muestreamos también la fórmula obtenida de 1 y 2

$$E^*(s) = [R(s) - H(s) \cdot C(s)]^* = R^*(s) - [H(s) \cdot C(s)]^*$$

OJO!: Al tener un muestreo del producto de $H(s) \cdot C(s)$ no podemos obtener $C^*(s)$ y sustituir la fórmula 4 muestreada, en su lugar, sustituiremos la fórmula 4 pero sin muestrear.

$$E^*(s) = R^*(s) - [H(s) \cdot U^*(s) \cdot G_2(s)]^* = R^*(s) - U^*(s) \cdot [H(s) \cdot G_2(s)]^*$$

Sustituimos $U^*(s)$ y despejamos $E^*(s)$:

$$E^*(s) = R^*(s) - E^*(s) \cdot G_1^*(s) \cdot [H(s) \cdot G_2(s)]^*$$

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + G_1^*(s) \cdot [H(s) \cdot G_2(s)]^*}$$

Ahora sustituimos $E^*(s)$ en la ecuación de $C^*(s)$ (5) y pasamos a Z directamente para calcular la F.T.:

$$C^*(s) = \frac{R^*(s) \cdot G_1^*(s) \cdot G_2^*(s)}{1 + G_1^*(s) \cdot [H(s) \cdot G_2(s)]^*} \quad \xrightarrow{z} \quad C(z) = \frac{R(z) \cdot G_1(z) \cdot G_2(z)}{1 + G_1(z) \cdot HG_2(z)}$$

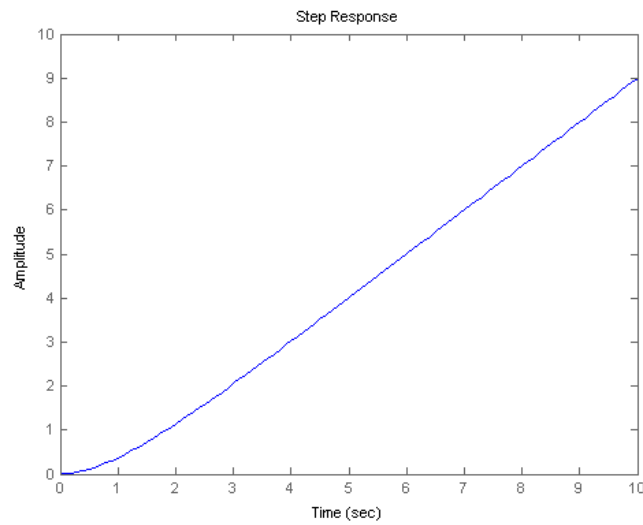
La F.T. Pulso del sistema será entonces:

$$G_{LC}(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z) \cdot G_2(z)}{1 + G_1(z) \cdot HG_2(z)}$$

Haremos una simulación en MatLab (*cc_014.m*) con los dos primeros sistemas para ver las ventajas de la realimentación con los siguientes valores:

$$G_1(s) = \frac{1}{s \cdot (s + 1)} \quad G(s) = Gh_0(s) \cdot G_1(s)$$

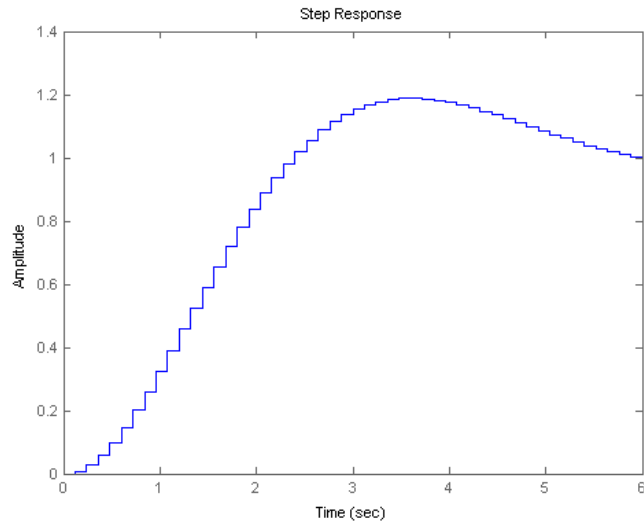
- Transformada de Laplace (Señal Continua)



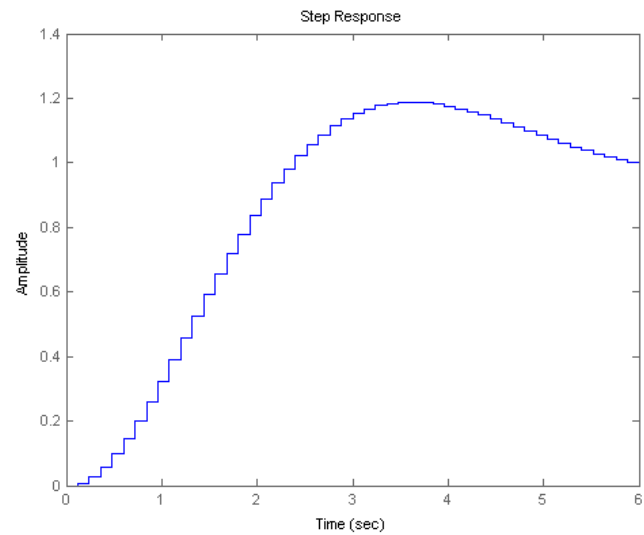
Sistema en Lazo Abierto

$$H(s) = 1$$

○ **Sistema 1:**



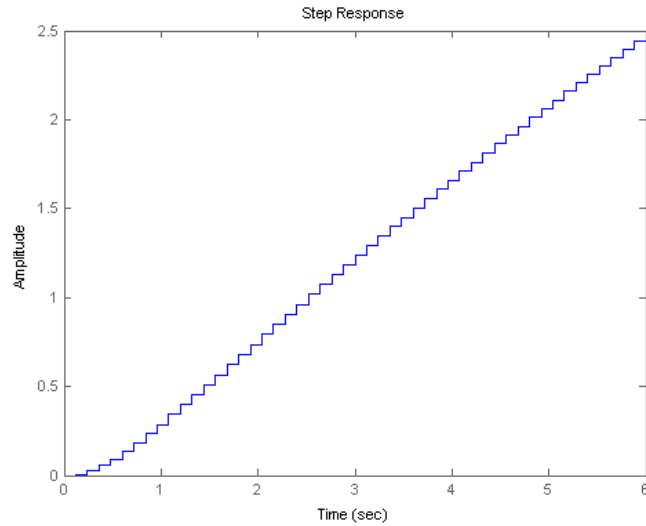
○ **Sistema 2:**



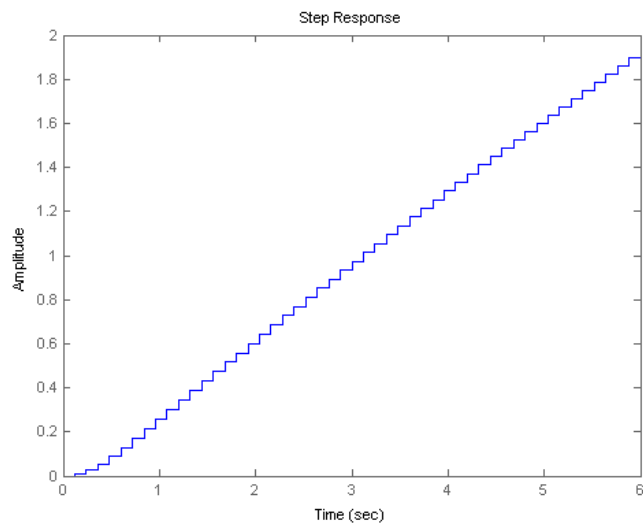
- **Sistema en Lazo Cerrado**

$$H(s) = \frac{10 \cdot s + 1}{s + 10}$$

- **Sistema 1:**



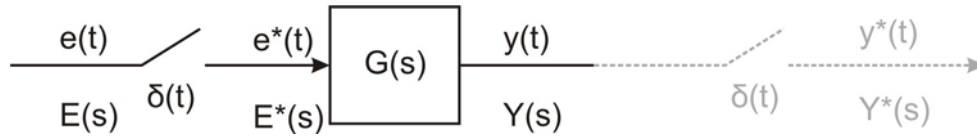
- **Sistema 2:**



Vemos que al representar la señal sin realimentación el sistema es inestable, nunca converge ya que al no tener realimentación el error se va acumulando constantemente.

Transformada Z Modificada (o Retardada)

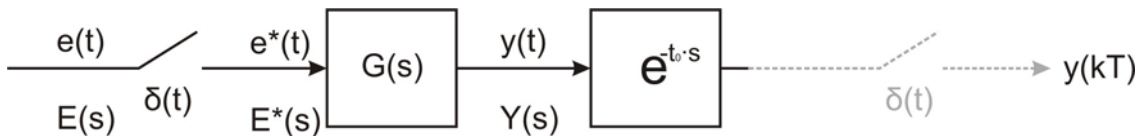
Si tenemos un sistema híbrido y queremos estudiarlo mediante la transformada Z, lo primero que debemos hacer es obtener la salida muestreada, aunque sea un muestreador ficticio.



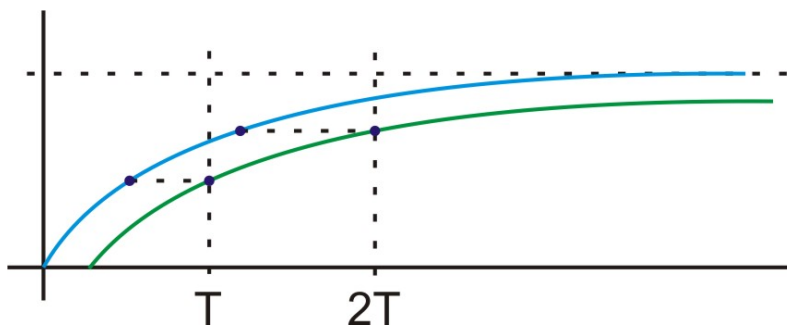
Al ser el muestreador ficticio implica que no tenemos información sobre la salida real que es continua, si queremos conocerla tenemos dos posibilidades:

1. Estudiar el sistema mediante Laplace, que presentaba el problema de la señal muestreada que tenía infinitos polos, salía una señal periódica ...
2. Usar la transformada Z Modificada: no es más que añadir al sistema además de un muestreador ficticio, un retardo de tiempo ficticio antes del muestreador. Si hacemos que el retardo vaya de 0 a T podemos conocer la salida en todo este intervalo.

Nosotros trabajaremos con la segunda posibilidad construyendo un sistema igual a:



Obteniendo la siguiente respuesta:



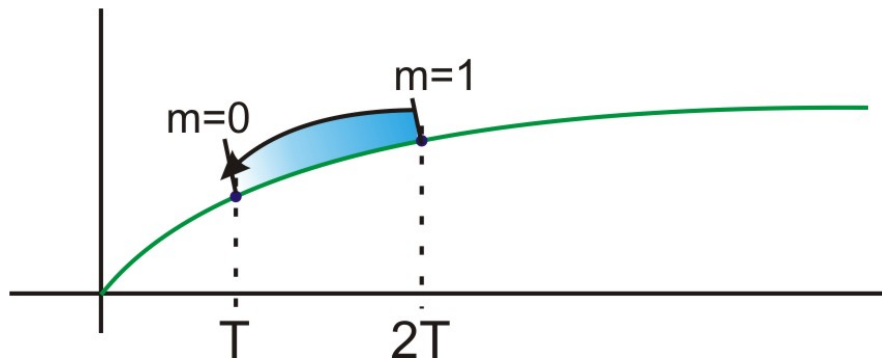
Si vamos modificando el valor de retardo de 0 a T obtenemos la señal en todo su dominio.

Con la transformada Z modificada se trabaja exactamente igual que con la transformada Z solo que en este caso tendremos un retardo $e^{-t_0 \cdot s}$, en las tablas miraremos la columna que corresponde a $E(z, m) = Z_{\text{mod}}\{E(s), m\}$ ó $Z_m\{E(s), m\}$

Indicar que ' m ' es un parámetro que va a ir siempre de 0 a 1 $\rightarrow 0 \leq m \leq 1$

El retardo de tiempo lo definiremos como $e^{-(1-m) \cdot T}$, si en esta expresión, movemos m de 0 a 1 tenemos que:

- $m = 0 \rightarrow e^{-T} \rightarrow$ retardo igual al periodo de muestreo
- $m = 1 \rightarrow e^0 = 1 \rightarrow$ será la propia señal en el instante de muestreo (retardo igual a 0).



Una de las utilidades de esta transformada es para la simulación, lo probaremos con un ejemplo, la otra de las utilidades será a la hora de estudiar sistemas que tienen un retardo no ficticio y que no podemos controlar, lo veremos más adelante.

Ejemplo 1: Uso de la Transformada Z Modificada (cc_015.m)

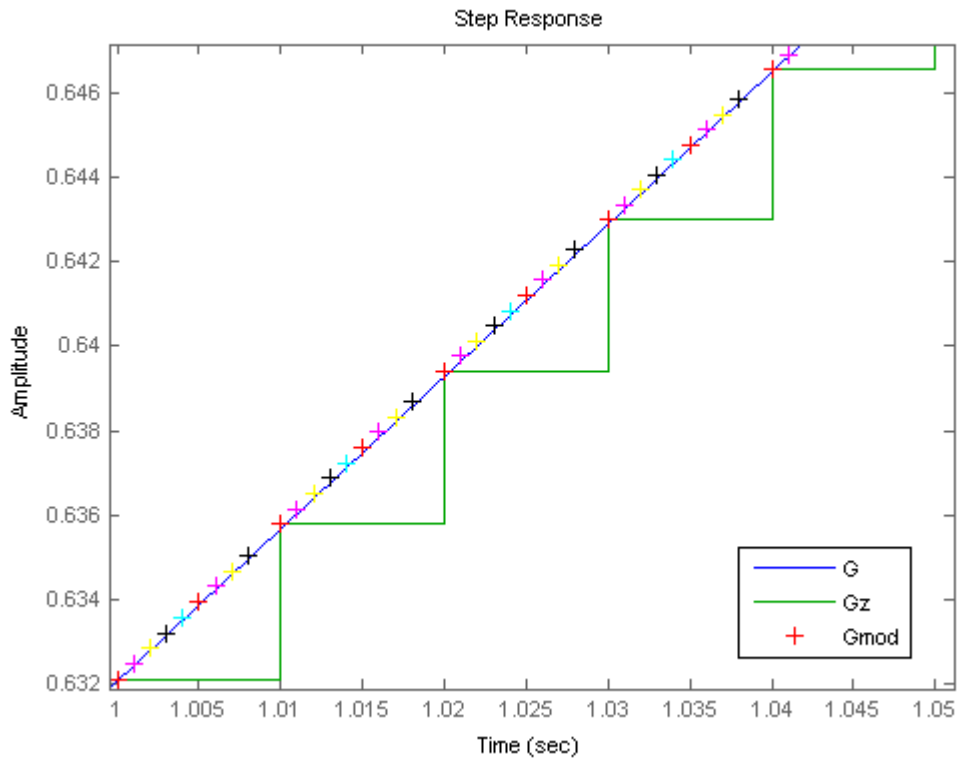
Tenemos: $G(s) = \frac{1}{(s+1)}$; $Gh_0(s) = \frac{(1-e^{-T \cdot s})}{s}$ y una entrada escalón.

Usando Z_{mod} simularemos:

$$y(t) \quad \text{con} \quad m = 0:0.1:1 \quad \text{y} \quad T = 0.01;$$

También usaremos la parte continua de MatLab para comparar ambas salidas.

MatLab no tiene implementada la transformada Z modificada, pero esto no supondrá un problema ya que solo es añadir un retardo a la parte continua del sistema. Lo que haremos será añadir este retardo a la parte continua y luego calcularemos la transformada Z del resultado.



En algunos sistemas reales, existe un retardo que hay que tener en cuenta, ejemplo, electro válvula que deja pasar agua, el caudal de agua no aumenta o disminuye instantáneamente, tiene un retardo de transporte que si no se controla hará que el sistema sea inestable.

En un sistema real, 'm' no tiene por qué ir de 0 a 1, por eso tenemos que realizar una determinada operación para llevarlo a ese rango:

$$t_0 = n \cdot T + \Delta \cdot T ; \text{ con } n = 0,1,2,3,\dots$$

Δ valdrá 0 si el retardo es menor que el periodo de muestreo.

Si definimos $m = 1 - \Delta$ ya estaría en el intervalo deseado, como consecuencia de esta transformación tenemos que:

$$e^{-t_0 \cdot s} = e^{-n \cdot T \cdot s} \cdot e^{-\Delta \cdot T \cdot s}$$

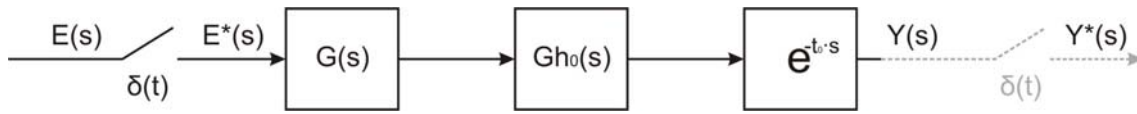
Tenemos por otro lado (visto anteriormente), que con términos e^{-nTs} podemos hacer la conversión z^{-n} por lo que si analizamos el sistema tendremos que:

$$Y^*(s) = [E^*(s) \cdot G(s) \cdot e^{-t_0 \cdot s}]^* = E^*(s) \cdot [G(s) \cdot e^{-t_0 \cdot s}]^* \xrightarrow{z}$$

$$Y(z) = E(z) \cdot z^{-n} \cdot Z\{G(s) \cdot e^{-\Delta \cdot T \cdot s}\} = E(z) \cdot z^{-n} \cdot Z_{\text{mod}}\{G(s), m\}$$

Lo veremos mejor con un ejemplo

Ejemplo 1: Calcular $Y(z)$



$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad Gh_0 = \frac{1-e^{-T \cdot s}}{s} \quad t_0 = 0.14s \quad T = 0.1s \quad \text{Entrada Impulso}$$

($E(s) = 1, E(z) = 1$)

Lo primero que haremos será descomponer el retardo como:

$$t_0 = n \cdot T + \Delta \cdot T = n \cdot 0.1 + \Delta \cdot T = 0.14$$

$$n = 1;$$

$$\Delta = 0.4$$

Para sacar n dividimos t_0 entre T y nos quedamos con la parte entera, el resto será Δ .

Ahora podemos calcular m : $m = 1 - \Delta = 0.6$;

De momento dejamos esto y pasamos a calcular $Y(s)$:

$$Y(s) = E^*(s) \cdot G(s) \cdot Gh_0(s) \cdot e^{-t_0 \cdot s}$$

Como vamos a utilizar la Transformada Z colocamos el muestreador ficticio a la salida y obtenemos:

$$Y^*(s) = [E^*(s) \cdot G(s) \cdot Gh_0(s) \cdot e^{-t_0 \cdot s}]^* = E^*(s) \cdot [G(s) \cdot Gh_0(s) \cdot e^{-t_0 \cdot s}]^*$$

$$Y^*(s) = E^*(s) \cdot \left[G(s) \cdot \frac{(1-e^{-T \cdot s})}{s} \cdot e^{-t_0 \cdot s} \right]^* \quad \xrightarrow{Z}$$

$$Y(z) = E(z) \cdot (1-z^{-1}) \cdot Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \cdot e^{-t_0 \cdot s} \right\}$$

Nota: $Z\{e^{-t_0 \cdot s}\} = Z\{e^{-n \cdot T \cdot s} \cdot e^{-\Delta \cdot T \cdot s}\} \rightarrow$ como tenemos un retardo puro podemos descomponer la expresión como $\rightarrow z^{-n} \cdot Z\{e^{-\Delta \cdot T \cdot s}\}$;

Sustituyendo en la expresión obtenemos:

$$Y(z) = E(z) \cdot (1-z^{-1}) \cdot z^{-n} \cdot Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \cdot e^{-\Delta \cdot T \cdot s} \right\}$$

la expresión de Z no aparece en las tablas, pero sí en las de la transformada modificada, por tanto podemos sustituir la expresión anterior por

$$Y(z) = E(z) \cdot (1 - z^{-1}) \cdot z^{-n} \cdot Z_{\text{mod}} \left\{ \frac{G(s)}{s}, m \right\}$$

En este caso lo que haremos sería descomponer $G(s)$ en fracciones simples y mirando en las tablas y sustituyendo m por su valor, tendríamos la expresión buscada.

Recordemos que $m = 0.6$:

$$Z_{\text{mod}} \left\{ \frac{G(s)}{s}, 0.6 \right\}$$

sustituyendo $G(s)$ por su valor

$$Z_{\text{mod}} \left\{ \frac{1}{s \cdot (s + 1)}, 0.6 \right\}$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{s \cdot (s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + 1)};$$

calculándolo con MatLab obtenemos:

```
[R,P,K] = residue(1,[1,1,0]);
R = [-1 1]
P = [-1 0]
```

Sustituyendo $A = 1$ y $B = -1$, sustituyendo:

$$Z_{\text{mod}} \left\{ \frac{1}{s} + \frac{(-1)}{(s + 1)}, 0.6 \right\} = Z_{\text{mod}} \left\{ \frac{1}{s}, 0.6 \right\} - Z_{\text{mod}} \left\{ \frac{1}{(s + 1)}, 0.6 \right\}$$

mirando las tablas obtenemos la expresión directa:

$$Z_{\text{mod}} \left\{ \frac{1}{s}, 0.6 \right\} = \frac{1}{(z - 1)} \qquad Z_{\text{mod}} \left\{ \frac{1}{(s + 1)}, 0.6 \right\} = \frac{e^{-0.6T}}{z - e^{-T}}$$

Agrupando todos los términos calculados obtenemos la expresión final de $Y(z)$:

$$Y(z) = E(z) \cdot (1 - z^{-1}) \cdot z^{-1} \cdot \left(\frac{1}{z - 1} - \frac{e^{-0.6T}}{z - e^{-T}} \right)$$

resolviendo nos queda:

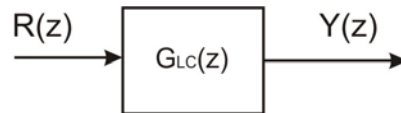
$$E(z) = 1;$$

$$Y(z) = \frac{z - 1}{z} \cdot \frac{z \cdot (1 - e^{-0.6T}) - e^{-T} + e^{-0.6T}}{z^2 - z \cdot (1 + e^{-T}) + e^{-T}}$$

TEMA 3. ESTABILIDAD EN SISTEMAS DISCRETOS

Introducción

Un sistema de control siempre debe ser estable, sino, tendería a infinito y el sistema no funcionaría. Tendremos un sistema cualquiera en lazo cerrado del que podremos obtener su F.T., tendrá una entrada que será la referencia y una salida.



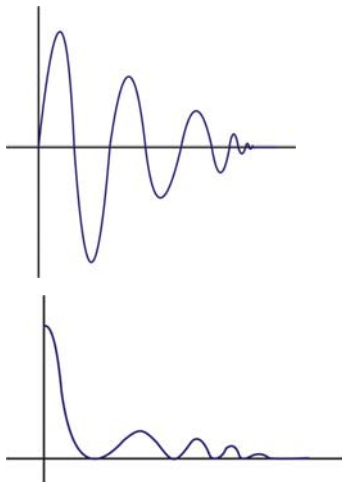
Recordemos que un **sistema es estable** si para toda entrada acotada, la salida estaba también acotada. La entrada podrá ser cualquiera que tenga un límite máximo y un límite mínimo, de cualquier forma la salida debe tenerlos igualmente. Si la salida oscila entre dos valores, el sistema se llama críticamente estable, aunque, según la definición, el sistema sería estable, pero a nosotros esto no nos vale (un control de temperatura que oscilase entre -10 y 10 grados), por ello daremos otra definición:

Diremos que un **sistema es absolutamente estable** y lo llamaremos estable si para una entrada impulso, la secuencia de ponderación se hace cero, esto significa que el efecto de la entrada no permanece en el tiempo sino que se va amortiguando y al final el sistema acaba estabilizándose.

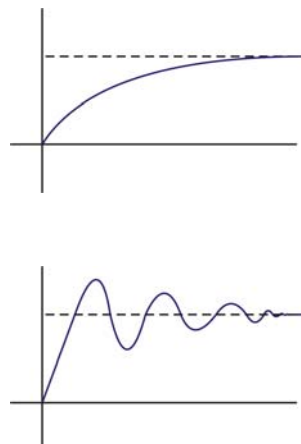
De igual forma para una entrada escalón tenderá a estabilizarse pero hacia un valor constante, dependiendo de la altura del escalón.

A continuación veremos las posibles respuestas de sistemas estables para éstas dos entradas:

- Entrada Impulso



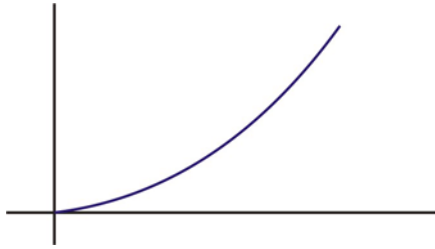
- Entrada Escalón



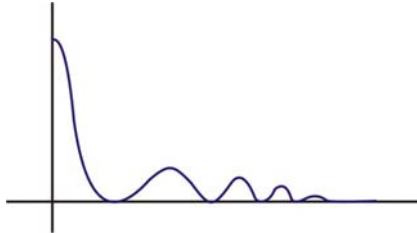
En conclusión:

Un sistema puede ser:

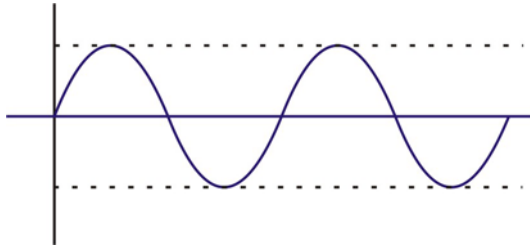
- Inestable: dada una entrada, la salida tiende a infinito.



- Estable: dada una entrada, la salida tiene a 0 o a un valor constante.



- Críticamente Estable: dada una entrada, la salida oscila entre dos valores.



¿Cómo estudiar la estabilidad del sistema?

Una vez que tenemos la F.T. del sistema, lo tenemos definido como un bloque, con una sola ecuación, ¿Cómo sabremos la respuesta a una entrada escalón por ejemplo?, lo que haremos será pasar del dominio de Z al dominio del tiempo mediante Z^{-1} de G_{LC} , una vez hecho esto, veremos si la expresión tiende a 0 (sistema estable) o a infinito (sistema inestable).

Veremos los diferentes casos que se pueden dar y como saber a que tiende la salida en cada uno de ellos:

1. Polos Reales y Simples:

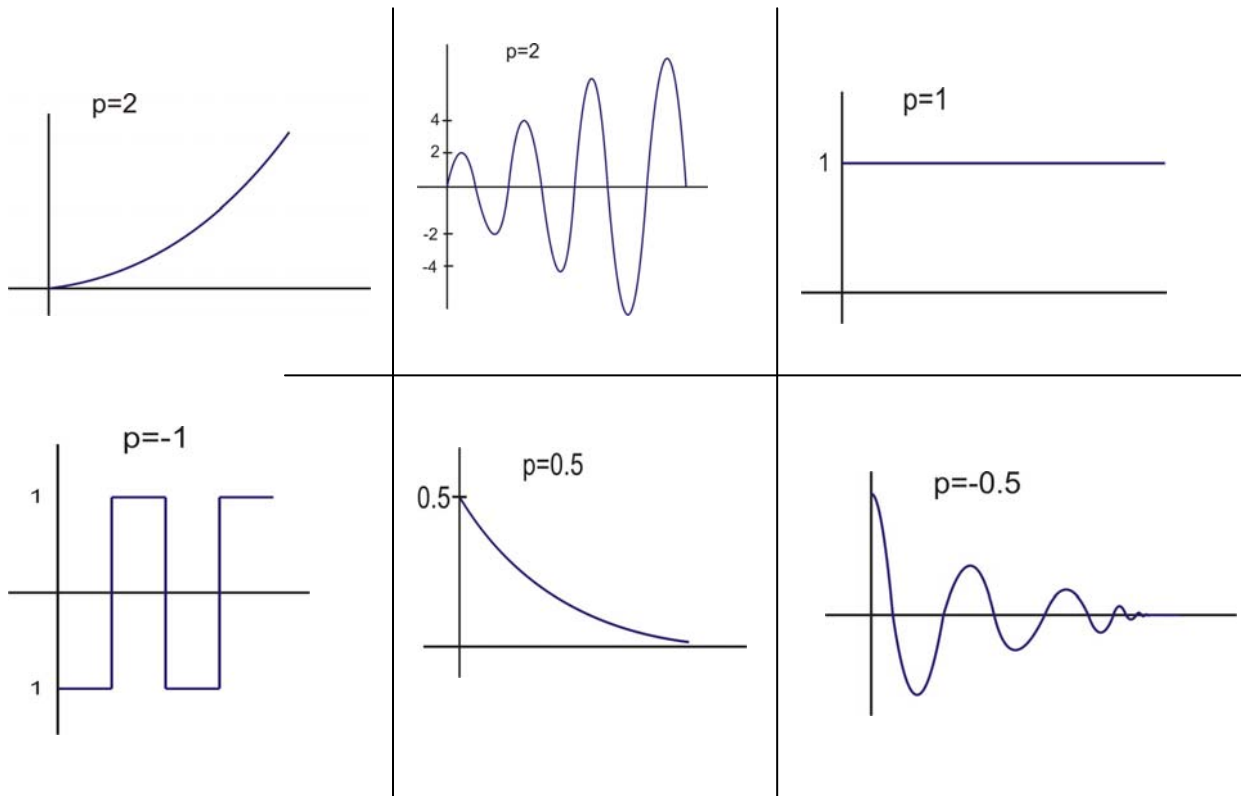
$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z-p}; \text{ 'p' un polo real, o lo que es lo mismo } Y(z) = \frac{A \cdot z}{z-p}$$

Haciendo la transformada inversa de esta expresión, según las tablas obtendremos por cada polo simple que:

$$y(k \cdot T) = A \cdot p^k; \text{ para } k = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$$

Si tenemos varios polos tendremos la suma de todas sus expresiones Z^{-1}

Vamos a comprobar a que tiende la expresión para una entrada impulso según algunos valores de 'p'.



- Si $|p| < 1 \rightarrow$ Estable
- Si $|p| > 1 \rightarrow$ Inestable
- Si $p = -1 \rightarrow$ Críticamente estable ó Marginalmente estable
- Si $p = 1 \rightarrow$ Inestable, aunque con la entrada impulso la salida valdría siempre 1 y pueda parecer estable, si lo hacemos con una entrada escalón obtendríamos una rampa que tendería a infinito.

2. Polos Reales Múltiples:

$$Y(z) = \frac{A \cdot z}{z - p} + \frac{B \cdot z}{(z - p)^2} + \dots + \frac{M \cdot z}{(z - p)^n}$$

En este caso en las tablas, el primer sumando es igual que la expresión de antes, para

$$\frac{B \cdot z}{(z - p)^2} \approx k \cdot T \cdot p^k, \text{ en general } k \cdot T^n \cdot p^k.$$

Si estudiamos la estabilidad obtenemos al igual que antes:

- Si $|p| < 1 \rightarrow$ Estable
- Si $|p| \geq 1 \rightarrow$ Inestable

3. Polos Complejos Simples:

$$Y(z) = \frac{c \cdot z \cdot \text{sen}(b \cdot T)}{z^2 - 2 \cdot c \cdot z \cdot \cos(b \cdot T) + c^2} + \frac{z \cdot (z - c \cdot \cos(b \cdot T))}{z^2 - 2 \cdot c \cdot z \cdot \cos(b \cdot T) + c^2}$$

De aquí obteníamos que:

$$y(kT) = c^k \cdot \text{sen}(bkT) + c^k \cdot \cos(bkT)$$

Tanto el seno como el coseno son ondas que oscilan, por eso para que esta expresión tienda a 0, la condición que debe cumplirse será que $|c| < 1$.

Si recordamos, los polos complejos simples eran de la forma:

$$p1 = \sigma + j\omega$$

$$p2 = \sigma - j\omega$$

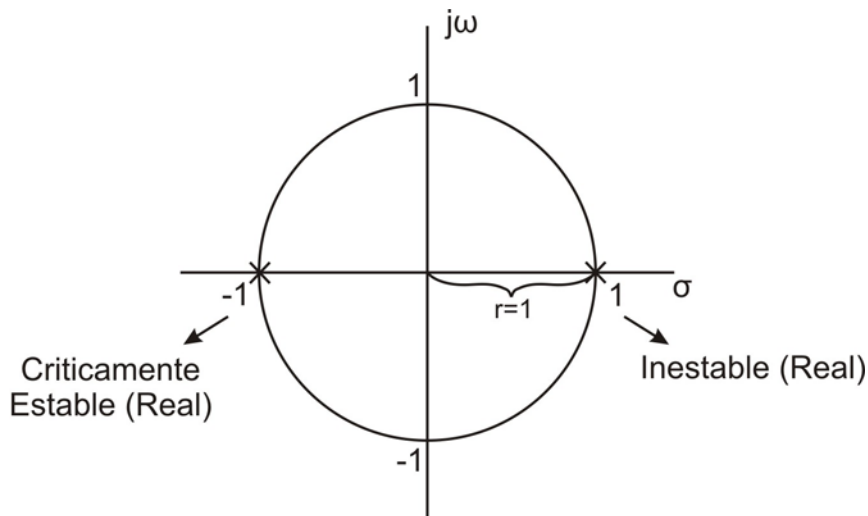
Lo que tendremos en el denominador será $(z-p1) \cdot (z-p2)$, si desarrollamos la expresión obtenemos:

$$\begin{aligned} (z - p1) \cdot (z - p2) &= (z - \sigma - j\omega) \cdot (z - \sigma + j\omega) = (z - \sigma)^2 - (j\omega)^2 = \\ &= z^2 + \sigma^2 - 2 \cdot z \cdot \sigma + \omega^2 = z^2 + z \cdot (-2 \cdot \sigma) + \omega^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

Si vemos el denominador de las expresiones anteriores, veremos que el término independiente sería c^2 , si lo comparamos con esta expresión veremos que:

$$c^2 = \omega^2 + \sigma^2$$

Esta ecuación corresponde a una circunferencia de Radio c .



Un sistema será estable siempre que los polos estén dentro de la circunferencia unidad, siempre que estén fuera, el sistema será inestable. En el caso de tener un par de polos complejos justo encima del círculo unidad el sistema será críticamente estable, si tenemos más de uno, el sistema puede ser inestable.

Conclusión:

A la hora de estudiar la estabilidad de un sistema LTI tendremos que:

Un sistema será estable cuando:

- Todos sus polos están dentro del círculo unidad.

Un sistema será inestable:

- Si uno solo de los polos está fuera del círculo unidad.
- Si tenemos un polo real múltiple sobre el círculo unidad ($|p| = 1$).
- Si tenemos más de un par de polos complejos sobre el círculo unidad.

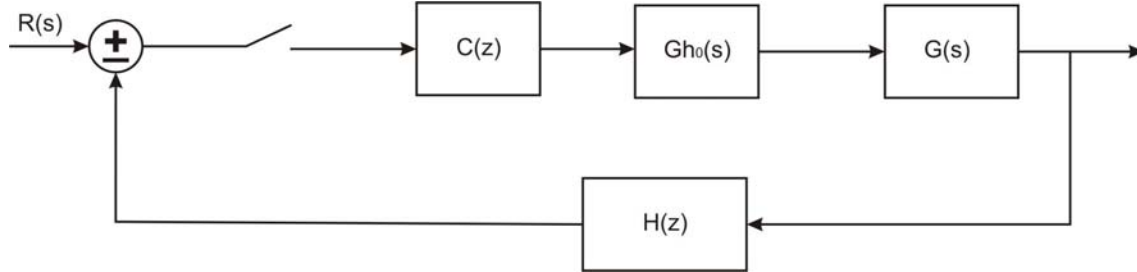
Un sistema será críticamente estable:

- Si tenemos un polo real en -1 .
- Si tenemos un par de polos complejos sobre el círculo unidad.

A la hora de diseñar un controlador, siempre haremos que tenga los polos dentro del círculo unidad para que el sistema sea estable.

Podemos estudiar la estabilidad del sistema siempre y cuando el sistema sea LTI (Lineal Invariante en el Tiempo).

Esquema de Control



$C(z)$ → Esta parte del sistema la controlamos nosotros, podemos hacer el diseño para que el sistema se comporte de manera estable, indiferente ya de cómo responda ante la salida esperada.

Ecuación Característica

Cuando vayamos a estudiar la estabilidad de un sistema, tendremos que calcular sus polos, para ello, calcularemos su función de Transferencia:

$$G_{LC}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{Num(z)}{Den(z)}$$

Lo que haremos será que el $Den(z) = 0$, a esto se le llama “**Ecuación Característica**”, esto será lo único que nos importe a la hora de analizar o calcular la estabilidad del sistema, el numerador (los ceros) no nos importan para estos cálculos.

La **ecuación característica** será un polinomio del tipo:

$$a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + a_{n-2} \cdot z^{n-2} + \dots + a_1 \cdot z + a_0 = 0$$

Que también puede escribirse como:

$$(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_n) = 0$$

A continuación veremos en MatLab (*cc_016.m*) todos los casos que hemos visto:

- Polos Reales simple → $|p| < 1$, $|p| > 1$, $p = 1$, $p = -1$
- Polos Reales Múltiples → $|p| \geq 1$, $|p| < 1$
- Polos Complejos Simples y Múltiples → p dentro de $C1$ (circunferencia unidad), p fuera de $C1$ y p sobre $C1$.

Test de Estabilidad Jury

Para saber si un sistema es estable, podíamos comprobar que los polos de la F.T. en lazo cerrado estaban en la circunferencia unidad. Hoy día usamos MatLab, pero antes estos cálculos había que hacerlos a mano, por ello, surgió el test de Jury, que además de indicarnos si el sistema es estable o no, nos indica también las condiciones que debe tener un determinado parámetro para que el sistema sea estable. Este test se usa sólo para sistemas discretos, también existe el test de Routh para sistemas continuos, pero no lo daremos, tan sólo saber que habría que realizar la transformación bilateral de la siguiente forma:

$$\text{Forma 1: } z = \frac{(w+1)}{(w-1)}; w = \frac{(z+1)}{(z-1)} \text{ si } z = 0 \rightarrow w = -1;$$

$$\text{Forma 2: } z = \frac{1 + \frac{T}{2} \cdot w}{1 - \frac{T}{2} \cdot w}; w = \frac{2}{T} \cdot \frac{(z-1)}{(z+1)}; \text{ si } z = 0 \rightarrow w = -\frac{2}{T}$$

Esta transformación se realiza para que la parte real de la función del sistema continuo sea negativa.

El criterio de Jury lo usaremos con un sistema del que tengamos la FT en LC (lazo cerrado), tendremos una división de polinomios; como vimos, la estabilidad sólo dependía de los polos, es decir, del polinomio del denominador (ecuación característica), hasta aquí es igual que hemos visto, sin embargo no tendremos por qué resolver la ecuación para saber si los polos están dentro del círculo unidad (complejidad que aumentaría a medida que el grado del polinomio aumentase). El test consiste en realizar una tabla (fotocopia) y aplicar las operaciones que se indican en ella.

La única condición antes de aplicar el test es que $a_n > 0$, si sale negativa, multiplicaríamos toda la ecuación por -1.

El número de filas que contendrá la tabla es de $2 \cdot n - 3$ donde n es el orden del sistema, lógicamente no tendría sentido para $n < 2$.

Las columnas irán desde z^0 hasta z^n y las filas irán desde 1 hasta $2 \cdot n - 3$. Las dos primeras filas las tenemos como datos ya que la primera empezamos con a_0 y terminamos con a_n y la segunda es la primera escrita al revés.

Si nos fijamos, veremos que la fila 3 y 4 dependen de los mismos valores (llamados 'b' en el caso de la fotocopia), cada dos filas vamos teniendo un elemento menos, entre otras cosas porque si lo calculamos dará 0.

En general para cada elemento de la tabla haremos el determinante de la matriz de la siguiente forma:

- De las dos filas de arriba cogemos los dos primeros para la primera columna,
- Para la segunda columna cogeremos los dos equivalentes a la posición del elemento a calcular pero empezando por la derecha.

Una vez construida la tabla, deben darse las siguientes condiciones para cumplir el criterio de estabilidad:

- La ecuación característica debe ser mayor que 0; $D(1) > 0$
- $(-1)^n \cdot D(-1) > 0$; con n el orden del sistema (máximo exponente de z)
- $|a_0| < a_n$ y para cada fila $|b_0| > |b_{n-1}|$

Si se da las 3 condiciones quiere decir que todos los polos del Sistema están dentro del círculo unidad y por tanto el sistema es estable, en caso de no se dé una de las condiciones, el sistema es inestable.

Para comprenderlo mejor, haremos unos ejercicios:

Ejercicio 1: Estudiar la estabilidad del sistema aplicando el Test de Jury cuya E.C. es la siguiente: $D(z) = z^2 + (0.368k - 1.368)z + (0.368 + 0.264k) = 0$

Nota: Si resolviésemos la ecuación, tendríamos una expresión dependiente de k y sería difícil de decir si se encuentra en el círculo unidad.

Para aplicar el Test de Jury debemos calcular cuantas filas va a componer nuestra tabla. Si tenemos que el orden de la E.C. es $n = 2$ el nº de filas = $2 \cdot n - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$

Vemos que la condición suficiente para aplicar el Test de Jury se cumple ($a_n = 1 > 0$) por lo que pasamos a evaluar las condiciones de estabilidad y a construir la tabla para evaluar la tercera de las condiciones.

Si comparamos la expresión con la de la fotocopia:

$$a_0 = (0.368k - 1.368);$$
$$a_1 = (0.368 + 0.264k);$$

La primera nos dice que la ecuación evaluada en 1 tiene que ser mayor que 0:

$D(1) = 1^2 + (0.368k - 1.368) \cdot 1 + (0.368 + 0.264k) = 0.632 \cdot k > 0 \rightarrow k > 0$, es decir, que si k fuese menor que 0, el sistema será inestable.

La siguiente condición nos dice que $(-1)^n \cdot D(-1) > 0 \rightarrow (-1)^2 \cdot D(-1) > 0$:

$D(-1) = (-1)^2 + (0.368k - 1.368) \cdot (-1) + (0.368 + 0.264k) = 2.736 - 0.1k > 0$; por lo que podemos decir que para que el sistema sea estable $k < 27.36$.

Con esto tendríamos las dos condiciones que tiene que cumplir k para que el sistema sea estable:

$$0 < k < 27.36$$

A continuación para probar la tercera propiedad construimos la tabla, si recordamos, sólo tenemos una fila:

Fila 1 \rightarrow $(0.368k - 1.368)$ $(0.368 + 0.264k)$

La última condición nos dice que $|a_0| < a_2$:

$|0.368 + 0.264k| < 1 \rightarrow$ como en las condiciones anteriores llegamos a la condición de que $k > 0$, la expresión a la izquierda de la inecuación siempre será positiva, por eso podemos quitar el valor absoluto y resolver:

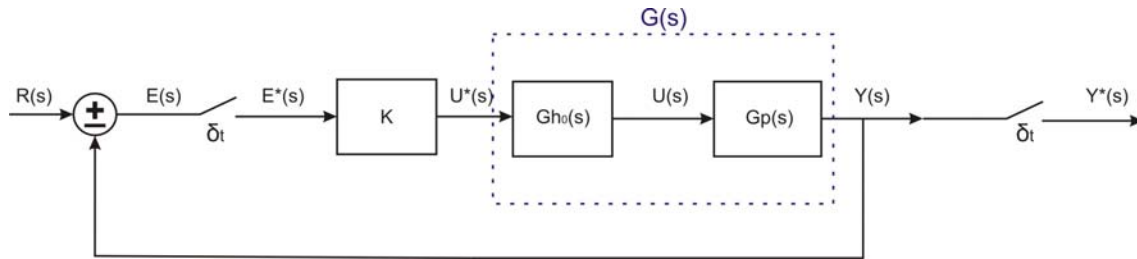
$$k < \frac{(1 - 0.368)}{0.264} \rightarrow k < 2.39; \text{ en este caso redondearíamos a 2 para que se}$$

cumpliese esta condición.

Conclusión: El sistema sería estable si $0 < k < 2.39$

Podemos probar esto poniendo como numerador una función cualquiera (z , por ejemplo) y como denominador la E.C dada, luego le aplicamos una entrada escalón o impulso para distintos valores de k y veremos como a partir de 2.39 el sistema se vuelve inestable.

Ejercicio 2: Obtener los valores de k para que el sistema siguiente sea estable (el valor de k puede ser un controlador, etc)



$$G(z) = Z\{G(s)\} = \frac{(0.3679 \cdot z + 0.264)}{(z - 0.3679) \cdot (z - 1)}$$

Nota: Si no nos diesen $G(z)$ tendríamos que calcularla nosotros, como hemos hecho en ejercicios anteriores.

Para estudiar la estabilidad del sistema completo $\left(\frac{Y(z)}{R(z)}\right)$ dependiendo del parámetro k ,

lo podemos calcular estudiando los polos del sistemas o por el Test de Jury.

Lo haremos, como es lógico, por el Test de Jury, para ello en primera instancia tenemos que calcular la F.T., pero como este sistema es uno de los habituales, ya vistos en clase, aprovechamos y cogemos su F.T.

$$C(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{k \cdot G(z)}{(1 + k \cdot G(z) \cdot 1)}; \text{ siendo } H(z) = 1$$

Para estudiar la estabilidad tan solo nos interesa el denominador (la ecuación característica) por tanto:

$$D(z) = 0 \Rightarrow 1 + k \cdot G(z) = 1 + k \cdot \frac{(0.3679 \cdot z + 0.264)}{(z - 0.3679) \cdot (z - 1)} = 0$$

Si realizamos la suma obtenemos:

$$D(z) = \frac{(z - 0.3679) \cdot (z - 1)}{(z - 0.3679) \cdot (z - 1)} + \frac{k \cdot (0.3679 \cdot z + 0.264)}{(z - 0.3679) \cdot (z - 1)} = 0 \rightarrow \text{pasando el}$$

denominador común al otro término, como éste es 0, nos queda:

$$D(z) = z^2 + 0.3679 - 1.3679 \cdot z + 0.3679 \cdot k \cdot z + 0.264 \cdot k = 0$$

$$D(z) = \underbrace{1}_{a_2} \cdot z^2 + z \cdot \underbrace{(0.3679 \cdot k - 1.3679)}_{a_1} + \underbrace{(0.3679 + 0.264 \cdot k)}_{a_0} = 0$$

a_2

a_1

a_0

Ahora aplicamos las condiciones del Test de Jury, en este caso, al ser el sistema de orden 2, tendríamos 1 fila en dicho test.

$$a_2 = 1$$

$$a_1 = (0.3679 \cdot k - 1.3679)$$

$$a_0 = (0.3679 + 0.264 \cdot k)$$

1ª condición: $D(1) > 0$

$$D(1) = 1^2 + 1 \cdot (0.3679 \cdot k - 1.3679) + (0.3679 + 0.264 \cdot k) \rightarrow k > 0$$

Si k es una ganancia que multiplica a la planta, siempre tiene que ser positiva ya que el error no cambia de signo y entonces tendríamos el error cada vez más grande

2ª condición: $(-1)^n \cdot D(-1) > 0$; en este caso $n = 2$:

$$D(-1) = 1 - 0.3679 \cdot k + 1.3679 + 0.3679 + 0.264 \cdot k = 2.7358 - 0.1037 \cdot k > 0; \rightarrow \\ \rightarrow k < 26.382$$

3ª condición: $|a_0| < a_n$; con $n = 2$ en este caso:

$|0.3679 + 0.264 \cdot k| < 1 \rightarrow$ al igual que antes, el valor absoluto lo podemos quitar por ser siempre positivo, de no ser así, calcularíamos los dos casos como independientes, por un lado cuando es negativo y por otro cuando es positivo.

Si resolvemos nos queda:

$$k < 2.39$$

Conclusión: El sistema es estable si $0 < k < 2.39$