Modelización, Computación y Calibración Macroeconómica

José L. Torres

Universidad de Málaga

Huelva, 10 de Julio 2024

Sesión II: El modelo DSGE canónico: El modelo RBC

1. Un modelo DSGE canónico: El modelo RBC
2. El Estado Estacionario
3. La log-linearización del modelo

4. Un modelo DSGE canónico: El modelo RBC

- Modelo RBC (Real Business Cycle). Primer modelo resuelto numéricamente. Kydland and Prescott (1982).
- Dos tipos de agentes:

  Número grande de consumidores o familias idénticas (consumidor o familia representativa).

  Número grande de empresas idénticas (empresa representativa).

- Dos tipos de soluciones

  Equilibrio General Competitivo.

  Planificación centralizada.

4. Un modelo DSGE canónico: El modelo RBC

- Concepto de agente representativo.
- Suponemos que todos los agentes son idénticos en preferencias y tecnologías.
- Podemos analizar el comportamiento de uno de ellos y luego agregar.
- Idea de Robinson Crusoe.
- Posibilidad de introducir agentes heterogéneos.

4.1. Los consumidores

- El agente representativo es optimizador (maximiza una determinada función objetivo).
- En el caso de los consumidores la función objetivo es la utilidad o felicidad instantánea.
- Felicidad: Salud, dinero y amor.
- La utilidad o felicidad depende de dos elementos: Consumo, C, y Ocio, O.
- Maximización de la función objetivo sujeta a una determinada restricción. En el caso de los consumidores es la restricción presupuestaria.

4.1. Los consumidores

- Supuestos adicionales:
  - Mercados de capitales perfectos.
  - Utilidad aditivamente separable en el tiempo.
  - Separabilidad entre consumo y ocio.
  - Ahorro como variable de estado.

- Función de utilidad instantánea:

$$U(C, O)$$

$$U_C > 0, \qquad U_O > 0$$

$$U_{CC} < 0, \qquad U_{OO} < 0$$

$$U_{CO} > 0$$

- Vamos a suponer que la función de utilidad es separable en el tiempo.

ftbpFU3.6331in2.725in0ptFunción de utilidad CRRA (— $\sigma = 1$, - - $\sigma = 2$)figura32.eps

- Problema de maximización intertemporal:

$$\max_{(C_t, O_t)} E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, O_t)$$

donde β es el factor de descuento intertemporal, $\beta \in (0, 1)$, siendo:

$$\beta = \frac{1}{1+\theta}$$

donde θ es la tasa de preferencia subjetiva intertemporal $(\theta > 0)$.

- Así, si suponemos que no existe incertidumbre sobre el valor de las variables futuras, el problema el consumidor resulta en maximizar la siguiente sumatoria de utilidades:

$$\max_{(C_t, O_t)} U(C_0, O_0) + \beta U(C_1, O_1) + \beta^2 U(C_2, O_2)$$
$$+\beta^3 U(C_3, O_3) + ... + \beta^\infty U(C_\infty, O_\infty)$$

ftbpFU3.5008in2.6256in0ptPonderación de la utilidad para $\beta = 0.97$figura31.eps

4.1 Los consumidores

- Dotaciones: El consumidor es el propietario de los factores productivos de la economía:
  - Trabajo.
  - Capital.
- Las familias alquilan sus factores productivos a las empresas (precio de los factores productivos es el precio de alquiler).
- Las familias son las propietarias de las empresas.

4.1. Los consumidores

- Vamos a parametrizar la función de utilidad para poder resolver numéricamente el mdelo.
- Tenemos una gran variedad de funciones de utilidad que cumplen las condiciones anteriores.
- Vamos a suponer la siguiente función de utilidad:

$$U(C_t, O_t) = \gamma \log C_t + (1-\gamma) \log(N_t \overline{H} - L_t)$$

  γ : proporción del consumo sobre la renta total del individuo, N_t : Población (todos son trabajadores o es la población ¿16 años y ¡65 años), $\overline{H}$: Número total de horas efectivas disponibles (16 horas al día x 6 días a la semana x 52 semanas al año): 4.992 horas al año, L_t : Número de horas dedicadas a trabajar.
- Podemos normalizar $N_t \overline{H} = 1$.

4.1. Los consumidores

ftbpF4.1597in1.2592in0ptk9e16v01.wmf

4.1. Los consumidores

- Los consumidores alquilan a las empresas tanto su tiempo (trabajo) como sus ahorros en forma de capital.
- Suponemos que los beneficios de la empresa representativa son nulos.
- Si la empresa representativa obtiene beneficios extraordinarios, entonces tendríamos que incluir dicha cantidad en la restricción presupuestaria del consumidor. **NO** afecta a la solución.

- Problema general:

$$\max_{(C_t, I_t, O_t)} = E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\gamma \log C_t + (1-\gamma) \log(1-L_t) \right]$$

sujeto a la restricción presupuestaria:

$$C_t + I_t = W_t L_t + R_t K_t$$

- Ecuación de acumulación del capital:

$$K_{t+1} = (1-\delta) K_t + I_t$$

- Lagrangiano:

$$\max_{(C_t, K_t, O_t)} \beta^t \left\{ \begin{array}{c} \gamma \log C_t + (1-\gamma)\log(1-L_t) \\ -\lambda_t \left[C_t + K_{t+1} - W_t L_t - (R_t + 1 - \delta) K_t \right] \end{array} \right\}$$

Tenemos que tener en cuenta que la restricción presupuestaría sería

$$\begin{array}{l} ... - \lambda_t \left[C_t + K_{t+1} - W_t L_t - (R_t + 1 - \delta) K_t \right] \\ -\lambda_{t+1} \left[C_{t+1} + K_{t+2} - W_{t+1} L_{t+1} - (R_{t+1} + 1 - \delta) K_{t+1} \right] - ... \end{array}$$

- Condiciones de primer orden:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial C_t} &: \quad \frac{\gamma}{C_t} - \lambda_t = 0 \\
\frac{\partial}{\partial L_t} &: \quad \frac{1-\gamma}{1-L_t} - \lambda_t W_t = 0 \\
\frac{\partial}{\partial K_{t+1}} &: \quad \beta^{t+1}\lambda_{t+1}\left[E_t R_{t+1} + 1 - \delta\right] - \beta^t \lambda_t = 0
\end{aligned}
$$

4.1. Los consumidores

- Condición que iguala el ratio de sustitución marginal entre consumo y ocio al coste de oportunidad de una unidad adicional de ocio:

$$\frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{C_t}{1-L_t} = W_t$$

- Condición que iguala el ratio marginal del consumo con el de la inversión:

$$\frac{E_t C_{t+1}}{C_t} = \beta \left[E_t R_{t+1} + 1 - \delta\right]$$

- Otras parametrizaciones de la función de utilidad.
- Una de las pametrizaciones más usadas en la práctica es la función de utilidad del tipo CRRA (Constant Risk Relative Aversion) tienen la siguiente forma:

$$U(X_t) = \frac{X_t^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}$$

donde $\sigma > 0$. Por ejemplo:

$$U(C_t, L_t) = \log C_t - \omega \frac{L_t^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}$$

siendo $\omega > 0$, es decir, la función de utilida sería una combinación de la función logarítmica y la función CRRA.

- Otra alternativa (no separabilidad entre consumo y ocio):

$$U(C_t, L_t) = \frac{\left[C_t^{\omega}(1 - L_t)^{1-\omega}\right]^{1-\sigma}}{1 - \sigma}$$

- Otra forma funcional que también se emplea en algunas ocasiones es la función de utilidad del tipo CARA (Constant Absolute Risk Avesion) tiene la siguiente forma:

$$U(X_t) = -\frac{1}{\sigma}\exp(-\sigma X_t)$$

4.2. Las empresas

- Son las que producen los bienes.
- Para ello alquilan los factores productivos a las familias.
- Suponemos que las empresas maximizan beneficios, sujetas a la restricción tecnológica.
- Problema de optimización en la que se determina un vector de factores productivos, dados unos precios de los mismos, y a través de la función tecnológica, el nivel de producción.

4.2. Las empresas

- Tecnología: Función de producción agregada:

$$Y_t = A_t F(K_t, L_t)$$

- Y_t: Producción agregada de la economía.
- A_t: Productividad Total de los Factores.
- Cumple las siguientes propiedades:

$$F_K > 0, F_L > 0$$

$$F_{KK} < 0, F_{LL} < 0$$

$$F_{KL} > 0$$

4.2. Las empresas

- Condiciones de Inada:

$$\lim_{K \longrightarrow 0} F_K = \infty, \lim_{K \longrightarrow \infty} F_K = 0$$

$$\lim_{L \longrightarrow 0} F_L = \infty, \lim_{L \longrightarrow \infty} F_L = 0$$

Es decir, para producir hacen falta ambos factores productivos.

4.2. Las empresas

- Maximización de beneficios:

$$\max \Pi_t = P_t Y_t - W_t L_t - R_t K_t$$

sujeto a:

$$Y_t = A_t F(K_{t,} L_t)$$

- Si suponemos rendimientos constantes a escala y mercados competitivos: $\Pi_t = 0$.
- Condiciones de primer orden:

$$A_t P_t F_K(K_{t,} L_t) - R_t = 0$$

$$A_t P_t F_L(K_{t,} L_t) - W_t = 0$$

- El valor del producto marginal es igual al precio del factor.

4.2. Las empresas

- El precio relativo de los factores es igual a su productividad marginal.

$$A_t F_K(K_{t,} L_t) = \frac{R_t}{P_t}$$

$$A_t F_L(K_{t,} L_t) = \frac{W_t}{P_t}$$

- El precio del bien lo normalizamos a 1 $(P_t = 1)$:

$$A_t F_K(K_{t,} L_t) = R_t$$

$$A_t F_L(K_{t,} L_t) = W_t$$

4.2. Las empresas

- El problema de maximización de beneficios de la empresa también es intertemporal.
- La empresa maximizaría el valor presente de los beneficios. La tasa de actualización sería el tipo de interés real.
- Sin embargo, el resultado sería el mismo que si el problema fuese estático.

4.2. Las empresas

- Ejemplo: Función de producción Cobb-Douglas:

$$A_t F(K_{t,} L_t) = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

- α : elasticidad del nivel de producción respecto al capital.
- También la podemos interpretar como la participación de las rentas de capital en la renta total. $1-\alpha$ sería la participación de las rentas laborales en la renta total.

4.2. Las empresas

- Condiciones de primer orden:

$$\alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} - R_t = 0$$

$$(1-\alpha) A_t K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} - W_t = 0$$

- O escrito de otro modo:

$$R_t = \frac{\alpha A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}}{K_t} = \alpha \frac{Y_t}{K_t}$$

$$W_t = \frac{(1-\alpha) A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}}{L_t} = (1-\alpha) \frac{Y_t}{L_t}$$

o equivalentemente,

$$R_t K_t = \alpha Y_t$$

$$W_t L_t = (1-\alpha) Y_t$$

4.3. Equilibrio del modelo

- Consideración conjunta de las decisiones de los diferentes agentes.
- Los consumidores deciden cuanto van a consumir, C_t, cuanto van a invertir, K_t y cuanto van a trabajar, L_t, con el objetivo de maximizar su nivel de felicidad, tomando como dados los precios de los factores productivos y los impuestos.
- Las empresas van a dedicidir cuanto van a producir, Y_t, y cuanto capital, K_t y trabajo L_t, van a contratar dado los precios de los factores productivos.

4.3. Equilibrio del modelo

- Componentes del equilibrio:
  - Un sistema de precios para W y R.
  - Una asignación de valores para Y, C, L y K.
  - Una restricción de factibilidad, que nos indica las asignaciones posibles:

$$Y_t = C_t + I_t \tag{1}$$

Tanto el mercado de trabajo como el mercado de capitales están en equilibrio.

4.3. Equilibrio del modelo

Definición de Equilibrio: Un equilibrio competitivo para nuestra economía es una secuencia de consumo, ocio e inversión por parte de los consumidores $\left\{C_t, N_t\overline{H} - L_t, I_t\right\}_{t=0}^{\infty}$, y una secuencia de capital y de horas de trabajo utilizadas por parte de las empresas $\{K_t, L_t\}_{t=0}^{\infty}$, tal que dadas una secuencia de precios $\{W_t, R_t\}_{t=0}^{\infty}$:
i) El problema de optimización de los consumidores se satisface.
ii) Se cumplen las condiciones de primer orden para las empresas.
iii) La restricción de factibilidad de la economía se cumple.

Componentes del modelo:

- Preferencias:

$$U(C_t, O_t) = \gamma \log C_t + (1-\gamma) \log(1 - L_t) \tag{2}$$

- Tecnología Cobb-Douglas:

$$F(K_{t,} L_t) = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \tag{3}$$

- Dotaciones:

$$Tiempo = 1 \qquad K_0 \tag{4}$$

4.3. Equilibrio del modelo

Teoremas del Bienestar: Si no existen distorsiones tales como impuestos (distorsionadores) o externalidades:

- Primer Teorema del Bienestar: Todo equilibrio competitivo es un óptimo de Pareto.
- Segundo Teorema del Bienestar: Para cada óptimo de Pareto existe un sistema de precios que lo hace un Equilibrio Competitivo.

4.3. Equilibrio del modelo

- Suponemos que sólo existen consumidores y empresas.
- Podemos resolver el modelo de dos formas:

1. Problema Descentralizado.
2. Problema del Planificador Central o Dictador Benevolente (sin precios en la restricción presupuestaria).

- En este contexto ambas soluciones son las mismas.
- Con distorsiones, la solución del Planificador Central genera un mayor nivel de bienestar que el Problema Descentralizado.

4.3.1. Equilibrio del modelo (Equilibrio competitivo)

- Problema Descentralizado (Economía de mercado):

$$\max_{(C_t, I_t, O_t)} E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\gamma \log C_t + (1-\gamma)\log(1-L_t)\right]$$

sujeto a:

$$C_t + I_t = W_t L_t + R_t K_t$$

- Lagrangiano:

$$\max_{(C_t, K_t, O_t)} = E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\begin{array}{c} \left[\gamma \log C_t + (1-\gamma)\log(1-L_t)\right] \\ -\lambda_t \left[C_t + K_{t+1} - W_t L_t - (R_t + 1 - \delta) K_t\right] \end{array} \right)$$

- Condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial}{\partial C_t} : \gamma \frac{1}{C_t} - \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial L_t} : -\frac{1-\gamma}{1-L_t} + \lambda_t W_t = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial K_{t+1}} : \beta^{t+1} \lambda_{t+1} (E_t R_{t+1} + 1 - \delta) - \beta^t \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_t} : C_t + K_{t+1} - (R_t + 1 - \delta) K_t - W_t L_t = 0$$

- Hay que tener en cuenta que al derivar con respecto a K, también aparece esta variable en el periodo anterior:

$$
\begin{array}{rl}
= & ... + \\
& \beta^{t+1}\left(\begin{array}{c} U(C_{t+1}, O_{t+1})- \\ -\lambda_{t+1}(C_{t+1} + K_{t+2} - (R_{t+1} + 1 - \delta)K_{t+1} - W_{t+1}L_{t+1}) \end{array} \right. \\
& +\beta^{t}\left(\begin{array}{c} U(C_t, O_t)- \\ -\lambda_t(C_t + K_{t+1} - (R_t + 1 - \delta)K_t - W_t L_t \end{array} \right) + ...
\end{array}
$$

- Sustituyendo la primera condición de primer orden en la segunda condición de primer orden, obtenemos la condición que iguala el ratio de sustitución marginal entre consumo y ocio al coste de oportunidad de una unidad acicional de ocio:

$$\frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{C_t}{1-L_t} = W_t$$

- Sustituyendo la primera condición de primer orden en la tercera condición de primer orden, obtenemos la condición que iguala el ratio marginal del consumo con el de la inversión:

$$\frac{E_t C_{t+1}}{C_t} = \beta \left[E_t R_{t+1} + 1 - \delta \right]$$

- Por otra parte, del problema de maximización de la empresa sabemos que R y W son iguales a sus productos marginales:

$$R_t = \alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha}$$

$$W_t = (1-\alpha) A_t K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha}$$

4.3.1. Equilibrio del modelo (Equilibrio competitivo)

- Sustituyendo obtenemos:

$$\frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{C_t}{1-L_t} = (1-\alpha)A_t K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha}$$

$$\frac{E_t C_{t+1}}{C_t} = \beta E_t \left[\alpha A_t K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\right]$$

4.3.1. Equilibrio del modelo (Equilibrio competitivo)

- Por otra parte, sustituyendo el precio relativo de los factores productivos en la restricción presupuestaria del individuo obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_t} = C_t + K_{t+1} - (R_t + 1 - \delta)K_t - W_t L_t = 0$$

$$C_t + K_{t+1} - (\alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} + 1 - \delta)K_t - (1-\alpha)A_t K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} L_t = 0$$

$$C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t - A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} = 0$$

- SOLUCIÓN: Dos ecuaciones en diferencias:

$$E_t C_{t+1} = \beta E_t \left[\alpha A_t K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta \right] C_t$$

$$K_{t+1} = (1-\delta) K_t + A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - C_t$$

- más una ecuación estática que nos relaciona la oferta de trabajo con el salario real:

$$\frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{C_t}{1-L_t} = (1-\alpha) A_t K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha}$$

- El equilibrio competitivo consiste en encontrar secuencias de las variables $\{C_t, I_t, K_t, L_t, R_t, W_t, Y_t\}_{t=0}^{\infty}$ tal que sean satisfechas las condiciones que definen el equilibrio (por el momento suponemos que A_t es exógena):
  - Los consumidores maximizan su función de utilidad.
  - Las empresas maximizan beneficios.
  - Se cumple la restricción de factibilidad de la economía.

$$\frac{(1-\gamma)}{\gamma}\frac{C_t}{1-L_t} = W_t$$

$$\frac{E_t C_{t+1}}{C_t} = \beta E_t\left[R_{t+1} + 1 - \delta\right]$$

$$R_t = \alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} = \alpha\frac{Y_t}{K_t}$$

$$W_t = (1-\alpha)A_t K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} = (1-\alpha)\frac{Y_t}{L_t}$$

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

$$C_t + I_t = Y_t$$

4.3.2. Equilibrio del modelo (Planificación centralizada)

- Problema Planificador Centralizado:

$$\max_{(C_t, I_t, O_t)} E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\gamma \log C_t + (1-\gamma) \log(1 - L_t)\right]$$

sujeto a:

$$C_t + I_t = Y_t$$

- Lagrangiano:

$$\max_{(C_t, K_t, O_t)} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\begin{array}{c} \left[\gamma \log C_t + (1-\gamma) \log(1 - L_t)\right] - \\ \lambda_t \left[C_t + K_{t+1} - (1-\delta) K_t - A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}\right] \end{array} \right)$$

4.3.2. Equilibrio del modelo (Planificación centralizada)

- Condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial}{\partial C_t} = \gamma \frac{1}{C_t} - \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial L_t} = -\frac{1-\gamma}{1-L_t} + \lambda_t (1-\alpha) A_t K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial K_{t+1}} = \beta^{t+1} \lambda_{t+1} (\alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} + 1 - \delta) - \beta^t \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_t} = C_t + K_{t+1} - (1-\delta) K_t - A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} = 0$$

4.3.2. Equilibrio del modelo (Planificación centralizada)

- Sustituyendo obtenemos:

$$\frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{C_t}{1-L_t} = (1-\alpha)A_t K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha}$$

$$\frac{E_t C_{t+1}}{C_t} = \beta E_t\left[\alpha A_t K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\right]$$

4.3.2 Equilibrio del modelo (Planificación centralizada)

- SOLUCIÓN: Dos ecuaciones en diferencias:

$$E_t C_{t+1} = \beta E_t \left[\alpha A_t K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta \right] C_t$$

$$K_{t+1} = (1-\delta) K_t + A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - C_t$$

- más una ecuación estática que nos relaciona la oferta de trabajo con el salario real:

$$\frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{C_t}{1-L_t} = (1-\alpha) A_t K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha}$$

Por tanto ahora la solución del problema consiste en encontrar $\{C_t, I_t, K_t, L_t, Y_t\}_{t=0}^{\infty}$, tal que se cumplan las condiciones que definen el equilibrio. La estructura de la economía viene por tanto definida por el siguiente sistema de cinco ecuaciones:

$$\frac{(1-\gamma)}{\gamma}\frac{C_t}{1-L_t} = (1-\alpha)A_t K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha}$$

$$\frac{E_t C_{t+1}}{C_t} = \beta E_t \left[\alpha A_t K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\right]$$

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

$$C_t + I_t = Y_t$$

4.4. El modelo de equilibrio general dinámico estocástico

- Consiste en añadir perturbaciones estocásticas al modelo anterior.
- Podemos añadir una gran variedad de perturbaciones diferentes.
- En el modelo que estamos resolviendo suponemos que la perturbación de productividad sigue un proceso autorregresivo de primer orden, tal que:

$$\ln A_t = (1-\rho_A)\ln \overline{A} + \rho_A \ln A_{t-1} + \varepsilon_t^A, \qquad \varepsilon_t^A \sim N(0,\sigma_A^2)$$

donde $|\rho_A| < 1$ con objeto de asegurar la estacionariedad del proceso.

- Por otra parte, la función de utilidad de los individuos la podemos reescribir como:

$$\max_{(C_t, K_t, L_t)} = E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t B_t \left[\gamma D_t \log C_t + (1-\gamma) H_t \log(1 - L_t) \right]$$

donde B_t es una perturbación que refleja un shock general a las preferencias que afecta a la sustitución intertemporal de los consumidores (es a lo que denominamos una perturbación en las preferencias, D_t representa una perturbación en las preferencias de consumo y H_t representa una perturbación a la oferta de trabajo.

- Suponemos que el proceso que siguen estas tres perturbaciones es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \ln B_t \\ \ln D_t \\ \ln H_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_B & v_{BD} & v_{BH} \\ v_{DB} & \rho_D & v_{DH} \\ v_{HB} & v_{HD} & \rho_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln B_{t-1} \\ \ln D_{t-1} \\ \ln H_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t^B \\ \varepsilon_t^D \\ \varepsilon_t^H \end{bmatrix}$$

donde $|\rho_i \pm v_{ij}| < 1$, $i \neq j$, $i, j = B, D, H$, con objeto de asegurar la estacionaridad de los procesos, siendo $E(\varepsilon_t^i) = 0$ y $E(\varepsilon_t^i \varepsilon_t^i) = \sigma_i^2$, $\forall i$.

5. El Estado Estacionario

- El primer paso para resolver un modelo DSGE es calcular el Estado Estacionario.
- Estado estacionario: Las variables son constantes periodo a periodo.
- Resolvemos un modelo estático no lineal.

5. Estado estacionario

- Para calcular el estado estacionario, en primer lugar, eliminamos los subíndices de tiempo de las variables. Esto significa, por ejemplo, que tendríamos $... = C_{t-1} = C_t = C_{t+1} = ... = \overline{C}$. Por tanto, el modelo podemos definirlo como:

$$\frac{(1-\gamma)}{\gamma}\frac{\overline{C}}{1-\overline{L}} = (1-\alpha)\overline{AK}^{\alpha}\overline{L}^{-\alpha}$$

$$1 = \beta\left[\overline{R} + 1 - \delta\right]$$

$$\overline{Y} = \overline{AK}^{\alpha}\overline{L}^{1-\alpha}$$

$$\overline{I} = \delta\overline{K}$$

$$\overline{C} + \overline{I} = \overline{Y}$$

5. Estado Estacionario

- Estado Estacionario: A continuación calculamos el estado estacionario. Para ello partimos de la ecuación que determina la senda óptima de consumo, que viene dada por:

$$E_t C_{t+1} = \beta \left[E_t R_{t+1} + 1 - \delta \right] C_t$$

- Eliminando los subíndices de tiempo de la senda óptima de consumo obtenemos que:

$$1 = \beta(\overline{R} + 1 - \delta)$$

a partir de la cual obtenemos el valor de estado estacionario para el tipo de interés, tal que:

$$\overline{R} = \frac{1 - \beta + \beta\delta}{\beta} = \frac{1}{\beta} + \delta - 1$$

- Por otra parte, el tipo de interés real es igual a la productividad marginal del capital, por lo que la ecuación de la senda óptima de consumo en estado estacionario podemos también definirla como:

$$\overline{C} = \beta(\alpha \overline{AK}^{\alpha-1} + 1 - \delta)\overline{C}$$

Operando, resulta:

$$\beta(\alpha \frac{\overline{Y}}{\overline{K}} + 1 - \delta) = 1$$

Despejando el estado estacionario del stock de capital como función del nivel de producción en estado estacionario, resulta:

$$\overline{K} = \frac{\alpha\beta}{1 - \beta + \beta\delta}\overline{Y}$$

5. Estado Estacionario

- De la ecuación de acumulación en estado estacionario obtenemos:

$$\overline{K} = (1-\delta)\overline{K} + \overline{I}$$

por lo que operando resulta:

$$\overline{I} = \delta\overline{K}$$

y utilizando la expresión anterior para el stock de capital, podemos escribirla como:

$$\overline{I} = \frac{\alpha\beta\delta}{1-\beta+\beta\delta}\overline{Y}$$

- A su vez, de la restricción de factibilidad de la economía, obtenemos que en estado estacionario:

$$\overline{C} = \overline{Y} - \overline{I} = \frac{1 - \beta + \beta\delta - \alpha\beta\delta}{1 - \beta + \beta\delta}\overline{Y}$$

- A continuación, a partir de la oferta de trabajo, obtenemos que:

$$\overline{L} = \frac{\gamma(1-\alpha)(1-\beta+\beta\delta)}{(1-\gamma)\left(1-\beta+(1-\alpha)\beta\delta\right)+\gamma(1-\alpha)\left(1-\beta+\beta\delta\right)}$$

- Finalmente, sustituyendo llegamos al valor de equililibrio para el nivel de producción de la economía:

$$\overline{Y} = \overline{A}^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\frac{\alpha\beta}{1-\beta+\beta\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left[1+\frac{\gamma(1-\alpha)(1-\beta+\beta\delta)}{(1-\gamma)\left(1-\beta+(1-\alpha)\beta\delta\right)}\right]$$

- Una vez obtenido el estado estacionario de la economía, ya podemos proceder a transformar en estacionarias las variables de la economía y calcular la desviación de cada una de ellas respecto a su estado estacionario.

5. Estado Estacionario

- Una vez, obtenido el valor de la producción en estado estacionario, ahora podemos sustituir en las expresiones anteriores y obtener los valores de estado estacionario para las restantes variables. Así, el valor del stock de capital en estado estacionario vendría dado por:

$$\begin{aligned} \overline{K} &= \frac{\alpha\beta}{1-\beta+\beta\delta}\overline{A}^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\frac{\alpha\beta}{(1-\beta+\beta\delta)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ &\quad \left[1+\frac{\gamma(1-\alpha)(1-\beta+\beta\delta)}{(1-\gamma)\left(1-\beta+(1-\alpha)\beta\delta\right)}\right] \end{aligned}$$

6. Log-linearización del modelo

- En la realidad, el modelo no lo resolvemos tal cual (sistema no-lineal).
- Lo que resolvemos son dos modelos:
    - Modelo con ecuaciones no-lineales pero estático (Estado Estacionario)
    - Modelo con ecuaciones lineales y dinámico (la solución final del modelo aproximada del modelo original).
- Procedimiento de obtener una aproximación lineal a las ecuaciones no-lineales originales.

6. Log-linearización del modelo

- Existen diferentes métodos. Aquí vamos a utilizar el método de Uhlig (1999).
- Hacemos un cambio de variable. Definimos como a las desviaciones de cada variable respecto a su estado estacionario:

$$\widehat{x}_t = \ln x_t - \ln \overline{x}$$

1. Cada una de las variables pueden definirse como:

$$x_t \approx \overline{x}_t \exp(\widehat{x}_t) \approx \overline{x}_t(1+\widehat{x}_t)$$

2. Cuando dos variables estén multiplicando, entonces:

$$x_t z_t \approx \overline{x}_t(1+\widehat{x}_t)\overline{z}_t(1+\widehat{z}_t) \approx \overline{x}_t\overline{z}_t(1+\widehat{x}_t+\widehat{z}_t)$$

   esto, es, suponemos que el producto de dos desviaciones con respecto a sus estados estacionarios, $\widehat{x}_t\widehat{z}_t$, es un número muy pequeño y aproximadamente igual a cero.

3. La tercera regla hace referencia a las potencias, tal que:

$$x_t^a \approx \overline{x}_t^a(1+\widehat{x}_t)^a \approx \overline{x}_t^a(1+a\widehat{x}_t)$$

6. Log-linearización del modelo

- Log-linearización de la función de producción:

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

- En estado estacionario, la función de producción la escribimos como:

$$\overline{Y} = \overline{AK}^{\alpha} \overline{L}^{1-\alpha}$$

- Aplicando la primera de las reglas descritas anteriormente al lado izquierdo de la función de producción, resulta que:

$$Y_t \approx \overline{Y}(1 + \widehat{y}_t)$$

- Por su parte, aplicando la tercera regla al lado derecho de la función de producción, resulta que:

$$A_t K_t^{\alpha} \approx \overline{AK}^{\alpha}(1 + \widehat{k}_t)^{\alpha} \approx \overline{AK}^{\alpha}(1 + \alpha \widehat{k}_t)$$

- Por tanto, la ecuación log-linearizada para el nivel de producción es:

$$\overline{Y}(1+\widehat{y}_t) = \overline{AK}^{\alpha}\overline{L}^{1-\alpha}(1+\widehat{a}_t+\alpha\widehat{k}_t+(1-\alpha)\widehat{l}_t)$$

y operando:

$$\overline{Y}+\overline{Y}\widehat{y}_t = \overline{AK}^{\alpha}\overline{L}^{1-\alpha}+\overline{AK}^{\alpha}\overline{L}^{1-\alpha}\widehat{a}_t+\overline{AK}^{\alpha}\overline{L}^{1-\alpha}\alpha\widehat{k}_t+\overline{AK}^{\alpha}\overline{L}^{1-\alpha}(1-\alpha)\widehat{l}_t$$

- Utilizando la función de producción en estado estacionario y cancelando términos, resulta:

$$\overline{Y}\widehat{y}_t = \overline{Y}\widehat{a}_t+\overline{Y}\alpha\widehat{k}_t+\overline{Y}(1-\alpha)\widehat{l}_t$$

- Por lo que resulta que la aproximación lineal a la función de producción no lineal (en términos de desviaciones respecto al estado estacionario) viene dada por:

$$\widehat{y}_t = \widehat{a}_t+\alpha\widehat{k}_t+(1-\alpha)\widehat{l}_t$$

- Log-linearización de la ecuación de inversión:

$$I_t = Y_t - C_t$$

por lo que aplicando las reglas de log-linearización resulta:

$$\overline{I}_t(1+\widehat{i_t}) = \overline{Y}(1+\widehat{y}_t) - \overline{C}(1+\widehat{c}_t)$$

o equivalentemente,

$$\overline{I} + \overline{I}\widehat{i_t} = \overline{Y} + \overline{Y}\widehat{y}_t - \overline{C} - \overline{C}\widehat{c}_t$$

- En estado estacionario resulta que:

$$\overline{I} = \overline{Y} - \overline{C}$$

por lo que la expresión anterior podemos simplificarla a:

$$\overline{I}\widehat{i}_t = \overline{Y}\widehat{y}_t - \overline{C}\widehat{c}_t$$

y despejando las deviaciones de la inversión respecto a su valor de estado estacionario resulta:

$$\widehat{i}_t = \frac{\overline{Y}}{\overline{I}}\widehat{y}_t - \frac{\overline{C}}{\overline{I}}\widehat{c}_t$$

- Utilizando las definiciones de estado estacionario resulta que:

$$\frac{\overline{Y}}{\overline{I}} = \frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha\beta\delta}$$

y:

$$\frac{\overline{C}}{\overline{I}} = \frac{1-\beta+\beta\delta-\alpha\beta\delta}{\alpha\beta\delta}$$

Sustituyendo llegamos a que:

$$\widehat{i}_t = \frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha\beta\delta}\widehat{y}_t - \frac{1-\beta+\beta\delta-\alpha\beta\delta}{\alpha\beta\delta}\widehat{c}_t$$

6. Log-linearización del modelol

- La ecuación de acumulación de capital sería:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

- La ecuación log-lineal del proceso de acumulación de capital vendría dada por:

$$\widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\widehat{k}_t + \delta\widehat{i}_t$$

- La oferta de trabajo sería:

$$\frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{C_t}{1-L_t} = (1-\alpha)\frac{Y_t}{L_t}$$

- De nuevo, aplicando las reglas anteriores y sustituyendo los valores de estado estacionario previamente calculados, llegamos a la siguiente expresión:

$$\left[1+\frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\gamma)}\frac{1-\beta+\beta\delta}{1-\beta+(1-\alpha)\beta\delta}\right]\widehat{l_t} = \widehat{y_t} - \widehat{c_t}$$

- La ecuación de la senda óptima de consumo es:

$$\frac{E_t C_{t+1}}{C_t} = E_t \beta \left[1 + \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} - \delta \right) \right]$$

y aplicando el mismo procedimiento anterior, obtenemos:

$$E_t \widehat{c}_{t+1} - \widehat{c}_t = (1 - \beta + \beta\delta) \, E_t \widehat{y}_{t+1} - (1 - \beta + \beta\delta) \, E_t \widehat{k}_{t+1}$$

- Finalmente, dado el supuesto de que la PTF sigue un proceso AR(1), la log-desviación respecto a su estado estacionario sería:

$$\widehat{a}_t = \rho \widehat{a}_{t-1} + \varepsilon_t$$

- El modelo log-linearizado sería:

$$
\begin{aligned}
\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + \alpha \widehat{k}_t + (1-\alpha)\widehat{l}_t \\
[1-\beta+(1-\alpha)\beta\delta]\,\widehat{c}_t &= (1-\beta+\beta\delta)\widehat{y}_t - \alpha\beta\delta\widehat{i}_t \\
\widehat{k}_{t+1} &= (1-\delta)\widehat{k}_t + \delta\widehat{i}_t \\
\widehat{y}_t - \widehat{c}_t &= \left[1 + \frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\gamma)} \frac{1-\beta+\beta\delta}{1-\beta+(1-\alpha)\beta\delta}\right]\widehat{l}_t \\
E_t\widehat{c}_{t+1} - \widehat{c}_t &= (1-\beta+\beta\delta)\, E_t\widehat{y}_{t+1} - (1-\beta+\beta\delta)\, E_t\widehat{k}_{t+1} \\
\widehat{a}_t &= \rho\widehat{a}_{t-1} + \varepsilon_t
\end{aligned}
$$