

Modelización, Computación y Calibración Macroeconómica

José L. Torres

Universidad de Málaga

Huelva, 15 de Julio 2024

- 1 Calibración de los parámetros
- 2 Estimación econométrica

5. Calibración/estimación del modelo

- Modelo: Sistema de ecuaciones compuestas por variables endógenas (a calcular), variables exógenas (conocidas) y parámetros.
- Para poder resolver el modelo necesitamos dar valores a los parámetros.
- Tradicionalmente esto se ha llevado a cabo a través de la denominada calibración del modelo.
- Más recientemente, muchos autores optan por la estimación del modelo.
- Existe un debate en la actualidad sobre qué método es mejor.

5. Calibración de los parámetros

- Calibración: En nuestro contexto puede definirse como un método para asignar valores a los parámetros del modelo usando la información a priori.
- Más precisamente, podemos definir la calibración como una técnica econométrica bayesiana pura libre de econometría tradicional para llevar el modelo a los datos.
- La estimación econométrica de los modelos DSGE plantea problemas de identificación, que dificultan la estimación de todos los parámetros. Habitualmente producen valores inconsistentes o no razonables de muchos parámetros.
- Se supone que los parámetros de los modelos DSGE son "parámetros profundos", y por tanto invariantes a cambios de política (y por tanto no afectados por la crítica de Lucas).

5. Calibración de los parámetros

- En el modelo canónico RBC que estamos considerando tenemos cuatro tipos de parámetros:
 - Parámetros de preferencias
 - Parámetros tecnológicos
 - Parámetros de estado estacionario
 - Parámetros auxiliares
- En un modelo DSGE Nuevo Keynesiano tenemos más parámetros:
 - Parámetros de ajuste
 - Parámetros de heterogeneidad
 - Parámetros fiscales y monetarios
 - Márgenes de beneficios
 - etc.

5. Calibración de los parámetros

- La calibración de los parámetros de un modelo puede realizarse siguiendo diversos procedimientos.
- En primer lugar, podemos usar valores ya calibrados o estimados en otros trabajos que usan modelos similares para la misma economía.
- Este método es el más utilizado en las investigaciones académicas.
- Problemas con este procedimiento: los modelos son diferentes, las economías son diferentes, parámetros nuevos no calibrados anteriormente, etc.

5. Calibración de los parámetros

- Un segundo método de calibración es usar los datos de Contabilidad Nacional para dar valores a los principales parámetros.
- Por ejemplo, el parámetro tecnológico de una función de producción del tipo Cobb-Douglas:

$$Y_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$

- Este parámetro tiene una interpretación económica, como la proporción de rentas de capital sobre la renta total. Este dato puede encontrarse en Contabilidad Nacional donde la renta total se divide entre compensación a los trabajadores y excedente bruto de explotación.
- Este el método habitualmente usado para la calibración del parámetro α en la práctica.

5. Calibración de los parámetros

- Un tercer método de calibración es usar valores de estimaciones econométricas, tanto a nivel macro como a nivel micro.
- Problemas: Estas estimaciones dependen del método de estimación usado, de la construcción de las variables, del periodo muestral, etc.

5. Calibración de los parámetros

- Un cuarto método consiste en usar las condiciones de equilibrio del modelo en estado estacionario para calcular el valor de un parámetro. Por ejemplo, a partir de la condición de estado estacionario para la condición de inversión obtenemos:

$$\beta = \frac{1}{\bar{R} + 1 - \delta}$$

- Dado un valor objetivo para el tipo de cambio real, R , podemos calibrar β para un valor dado de δ o al contrario.

5. Calibración de los parámetros

- Por último, un quinto procedimiento es la calibración inversa. Consiste en resolver el estado estacionario, convirtiendo algunas variables en parámetros y algunos parámetros en variables.
- Para ello necesitamos dar valores a determinadas variables o ratios de variables.
- Resolveríamos el sistema de ecuaciones como si alguno de los parámetros fuesen variables desconocidas.

6. Estimación

- El enfoque alternativo a la calibración de los parámetros, es proceder a su estimación.
- Dos enfoques principales para la estimación de modelos DSGE:
 - Máxima Verosimilitud. Ireland (2004)¹
 - Estimación Bayesiana. Rabanal and Rubio-Ramirez (2003)²
- Otros métodos econométricos: Método de los Momentos Simulados (SMM), Método de los Momentos Generalizados (GMM).

¹Ireland, P. (2004): A method for taking models to the data. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28, 1205-1226.

²Rabanal, P. and Rubio-Ramirez, J.F. (2003): Inflation persistence: how much can we explain?, *Economic Review, Federal Reserve Bank of Atlanta*, issue Q2, pages 43-55.

6.1. Preparación de los datos

- Para estimar un modelo DSGE se requieren datos en la forma de series temporales para alguna de las variables endógenas.
- Un primer problema es que las variables del modelo pueden tener un significado distinto al de las variables observadas.
- Otro problema, este de menor importancia, es que pueden no existir datos sobre algunas de las variables del modelo.

6.1. Preparación de los datos

- En primer lugar, tenemos que decidir qué variables endógenas vamos a usar en la estimación. Esto es, el número de variables y cuáles de ellas. El mínimo es una variable.
- El máximo número de variables utilizadas en la estimación depende del número de shocks estocásticos, con el objeto de evitar el problema de la singularidad.
- En general, en un modelo DSGE, vamos a tener más variables que shocks stocásticos, por lo que no podemos utilizar todas las variables (a menos que introduzcamos más componentes aleatorios en el model).

6.1. Preparación de los datos

- En segundo lugar, debemos asegurarnos que el concepto de variable del modelo es el mismo que en los datos. Por ejemplo, en un modelo simple sin gobierno, el nivel de producción se define como, $Y = C + I$.
- Por tanto, no podemos usar el dato de producción de Contabilidad Nacional para representar a la producción del modelo.
- En este caso tenemos que crear un nuevo dato de producción como la suma del consumo y de la inversión, para que sea consistente con el modelo.

6.1. Preparación de los datos

- El último paso es eliminar la tendencia en los datos cuando el modelo sea estacionario. Este es nuestro caso.
- Incluso en el caso que analizamos el crecimiento de la economía, el procedimiento estándar es convertir el modelo estacionario.
- Algunos modelos DSGE son no-estacionarios, con lo que este paso no sería necesario, pero en este caso debemos estimar el componente tendencial de los datos.
- La mayoría de modelos DSGE están contruidos en términos de variables estacionarias. El comportamiento estocástico de las variables vendría dado en la forma de desviaciones temporales respecto a su valor de estado estacionario.
- En términos generales, las series temporales muestran tendencia y ciclos, y por tanto, la tendencia debe ser eliminada antes de usar el dato en la estimación.

6.1. Preparación de los datos

- Una posibilidad: Introducir tendencias estocásticas en el modelo
- Otra posibilidad: Usar las primeras diferencias para las variables del modelo.
- Sin embargo, esto reduce la identificación de los parámetros del modelo, dado que la información sobre el nivel de las variables y los ratios fundamentales no podría usarse.
- Tampoco conocemos cuál es la tendencia correcta del modelo. Esto es porque cada variable observada puede tener su propia tendencia.
- Además, los datos pueden ser no consistentes con la senda de crecimiento balanceada.
- Podemos eliminar la tendencia de los datos usando diferentes procedimientos.

6.1. Preparación de los datos

- En primer lugar, diferenciando.
- La diferenciación de primer orden de los datos toma el ciclo como la variable en primeras diferencias. Es decir, supone que la tendencia es una variable retrasada, la variable es un paseo aleatorio sin deriva, el componente cíclico es estacionario y que los dos componentes no están correlacionados. En este caso, x_t , puede representarse como:

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde la tendencia es $y_t = x_{t-1}$ y la estimación del componente cíclico es el ruido, definido como $c_t = x_t - x_{t-1}$.

6.1. Preparación de los datos

- Un segundo método es eliminar la tendencia a través de una regresión en función del tiempo. Esta regresión puede ser lineal o cuadrática.
- El supuesto habitual en la literatura sobre ciclos es suponer que la tendencia es determinista. El ciclo estaría definido por las desviaciones respecto a dicha tendencia.
- El procedimiento usual es obtener los residuos después de estimar la serie como una función de un polinomio del tiempo.

6.1. Preparación de los datos

- El supuesto implícito es que los componentes de tendencia y ciclo son ortogonales, y que y_t sigue un proceso determinista que puede aproximarse por una función polinómica del tiempo. Estos supuestos implican que el modelo para x_t tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}x_t &= y_t + c_t + \varepsilon_t \\y_t &= f(t) \\f(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \dots + a_k t^k\end{aligned}$$

donde k es el orden del polinomio. Incluso en el caso de autocorrelación, los parámetros en $f(t)$ pueden ser estimados eficientemente con mínimos cuadrados ordinarios.

6.1. Preparación de los datos

- Un tercer método es el filtrado de datos.
- En la literatura existen una gran variedad de metodos de filtrado.
- El más utilizado es el filtro de Hodrick-Prescott (fitro HP).

6.1. Preparación de los datos

- El filtro HP, Hodrick y Prescott (1997) es el más popular de los métodos de filtrado para descomponer las series en ciclo y tendencia. Este filtro extrae una tendencia estocástica que fluctúa de forma suave en el tiempo y no correlada con el componente cíclico. La estimación del componente tendencial se obtiene de minimizar la siguiente función:

$$\min_{\{y_t\}_{t=1}^T} \left[\sum_{t=1}^T c_t^2 - \lambda \sum_{t=1}^T ((y_{t+1} - y_t) - (y_t - y_{t-1}))^2 \right], \quad \lambda > 0$$

donde λ es un parámetro de penalización. El primer término de la función de pérdidas penaliza la varianza del ciclo, mientras que el segundo penaliza la falta de suavizado de la componente tendencial.

6.1. Preparación de los datos

- Una cuarta alternativa consiste en modelizar explícitamente la tendencia como parte de un problema de estimación. En este caso, tenemos:

$$y_t^{\text{obs}} = y_t^{\text{model}} + y_t^{\text{trend}}$$

donde y_t^{model} sería equivalente al componente cíclico y la tendencia se calcularía como:

$$y_t^{\text{trend}} = \mu + y_{t-1}^{\text{trend}} + u_t$$

6.1. Preparación de los datos

- Los métodos de aproximación local solo pueden ser usados en modelos con crecimiento balanceado: En ausencia de shocks, las variables crecen a una tasa constante.
- La tasa de crecimiento de la producción real es igual a la tasa de progreso tecnológico.
- El empleo crece a la tasa de crecimiento de la población.
- Las variables nominales crecen a la tasa a la que crece la cantidad de dinero.
- Los precios crecen en función de la diferencia entre la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero y la tasa de crecimiento de la tecnología.
- Normalmente, tanto el tipo de interés como la inflación se consideran procesos estacionarios.

6.2. Máxima Verosimilitud

- Los valores de los parámetros de los modelos DSGE son muy importantes para el análisis de política (determinan la respuesta cuantitativa del modelo).
- Esto justificaría la necesidad de estimar los parámetros en lugar de calibrarlos.
- Uno de los métodos que podemos utilizar para ello es la Máxima Verosimilitud.

6.2. Máxima Verosimilitud

- Generalmente, vamos a tener un modelo que especifica que las observaciones son realizaciones de una variable aleatoria Y .
- Y tiene una densidad paramétrica f_{Ω} para todos los valores de Ω .
- La función de máxima verosimilitud se define como:

$$f_y^{obs}(\Omega) = f_{\Omega}(y^{obs})$$

esto es, la densidad de Y se evalúa a y^{obs} como una función de Ω .

6.2. Máxima Verosimilitud

- Las funciones de transición de un modelo DSGE puede escribirse en el espacio de estados como:

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= Fx_t + G\varepsilon_{t+1} \\ \varepsilon_{t+1} &\sim \mathbf{N}(0, \Sigma_\varepsilon)\end{aligned}$$

donde x_t es un vector de variables de estado.

- Seguidamente, transformamos dicho modelo en forma del espacio de estado en un modelo econométrico. La ecuación de medida puede escribirse como

$$\begin{aligned}y_t^{obs} &= Hx_t + u_t \\ u_t &\sim \mathbf{N}(0, \Sigma_\varepsilon)\end{aligned}$$

donde y_t^{obs} es el vector de variables observables.

- El objetivo es obtener la función de verosimilitud para y_t^{obs} .

6.2. Máxima Verosimilitud

- El modelo DSGE econométrico puede escribirse como:

$$\begin{aligned}y_t^{obs} &= M\bar{y}_t + M\hat{y}_t + Nx_t + \eta_t \\ \hat{y}_t &= g_y\hat{y}_{t-1} + g_u u_t \\ E(\eta_t \eta_t') &= V \\ E(u_t u_t') &= Q\end{aligned}$$

- Para la evaluación de la función de verosimilitud se usa el algoritmo del filtro de Kalman.

6.2. Máxima Verosimilitud

- Una versión estándar del filtro de Kalman es la siguiente:

$$v_t = y_t^{obs} - \bar{y}_t - M\hat{y}_t - Nx_t$$

$$F_t = MP_tM' + V$$

$$K_t = g_y P_t p_y' F_t^{-1}$$

$$\hat{y}_{t+1} = g_y \hat{y}_t + K_t v_t$$

$$P_{t+1} = g_y P_t (g_y - K_t M)' + g_u Q g_u'$$

6.2. Máxima Verosimilitud

- A partir del filtro de Kalman, se deriva la siguiente función de verosimilitud (el logaritmo de):

$$\ln(\Omega, Y_T^*) = -\frac{Tk}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T |F_t| - \frac{1}{2} v_t' F_t^{-1} v_t$$

6.2. Máxima Verosimilitud

- **Problema de la singularidad estocástica:** El número de shocks exógenos del modelo debe ser al menos igual al número de variables observables. Sin embargo, normalmente en los modelos DSGE el número de variables endógenas excede al número de shocks exógenos.
- En este caso, el modelo predeciría que ciertas combinaciones lineales de las variables se producirían sin ruido, esto es, serían deterministas.
- Por ejemplo, en el modelo RBC que estamos resolviendo tenemos cuatro variables observadas (producción, consumo, inversión y trabajo) pero solo un shock exógeno (el shock tecnológico).

6.2. Máxima Verosimilitud

- Para obviar el problema de la singularidad estocástica, se usan dos alternativas:
 - Añadir más shocks estructurales al modelo
 - Añadir errores de medida
- Canova (2007): Añadir errores de medida hasta que el número de errores de medida más los shocks exógenos sean igual al número de variables observadas.

6.2. Máxima Verosimilitud

- Añadir errores de medida (Método de Ireland).
- La solución aproximada a un modelo DSGE puede exhibirse como:

$$\begin{aligned}x_t &= Ax_{t-1} + B\varepsilon_t \\y_t &= Cx_t\end{aligned}$$

- Los errores de medida se introducirían incorporando un término de error a cada ecuación de las variables observadas:

$$\begin{aligned}x_t &= Ax_{t-1} + B\varepsilon_t \\y_t &= Cx_t + u_t \\u_t &= Du_{t-1} + \zeta_t\end{aligned}$$

donde ζ_t es un vector de innovaciones con media cero y no correlacionadas serialmente.

6.3. Estimación Bayesiana

- La estimación Bayesiana es el método más utilizado para estimar modelos DSGE.
- La estimación Bayesiana puede considerarse como un método intermedio entre la calibración y la estimación por máxima verosimilitud. De hecho, la calibración sería equivalente a la especificación de las priors, que son el primer paso de la estimación bayesiana. A partir de aquí, el enfoque Bayesiano compara el modelo con los datos tal y como sucede con máxima verosimilitud.
- De hecho, la estimación lo que hace es permitirnos cierto control de la estimación, dando ponderaciones a la función de máxima-verosimilitud para darle más importancia a ciertas áreas del espacio paramétrico.
- La estimación Bayesiana presenta algunas ventajas respecto a la estimación MV, evitando estimaciones de parámetros que no son consistentes

6.3. Estimación Bayesiana

- La estimación Bayesiana, a partir del Teorema de Bayes, consistiría en:

$$\textit{Posterior PDF} \propto \textit{Prior PDF} \times \textit{Máxima Verosimilitud}$$

6.3. Estimación Bayesiana

- La estimación Bayesiana consistiría en los siguientes pasos:
 - Elegir una función de densidad a priori para cada parámetro que se quiera estimar.
 - Calcular la moda a posteriori.
 - Simular la distribución a posteriori.
 - Computar los estimadores y la región de confianza.
 - Calcular las probabilidades a posteriori.

III.4. Estimación Bayesiana

- El primer elemento de la estimación Bayesiana son las priors.
- La función de densidad a priori se define como:

$$p(\Omega_M, M)$$

donde M representa el modelo y donde Ω_M es el vector de parámetros que queremos estimar.

- La función de densidad a priori refleja las creencias a priori sin considerar los datos, pero teniendo en cuenta cualquier información sobre el valor de los parámetros.

III.4. Estimación Bayesiana

- La función de densidad a priori significa que tenemos que dar la media y la varianza, así como definir una distribución para cada parámetro a estimar.
- Si la varianza es cero, entonces estaríamos calibrando el modelo.
- Si la varianza es infinito, o si suponemos una distribución uniforme, entonces estaríamos estimando por MV.

III.4. Estimación Bayesiana

- El segundo componente, sería la función de máxima-verosimilitud para la densidad de las variables observadas, dado el modelo y los parámetros:

$$(\Omega_M | Y_T, M) \equiv p(Y_T | \Omega_M, M)$$

III.4. Estimación Bayesiana

- Usando el Teorema de Bayes tendríamos:

$$p(\Omega_M | Y_T, M) = \frac{p(\Omega_M, Y_T | M)}{p(Y_T | M)}$$

- También sabemos que:

$$p(Y_T | M) = \frac{p(\Omega_M, Y_T | M)}{p(\Omega_M | Y_T, M)}$$

- o equivalentemente:

$$p(\Omega_M, Y_T | M) = p(Y_T | M) \times p(\Omega_M | Y_T, M)$$

III.4. Estimación Bayesiana

Combinando la densidad a priori con la función de máximo-verosilidad, obtenemos la función de densidad a posteriori, que vendría dada por:

$$p(\Omega_M | Y_T, M) = \frac{p(\Omega_M | M) \times p(Y_T | \Omega_M, M)}{p(Y_T | M)}$$

III.4. Estimación Bayesiana

- Habitualmente se usan técnicas MCMC (Markov Chain Monte Carlo) para obtener una aproximación a la función de densidad a posteriori.
- Diferentes algoritmos para la computación MCMC. El más utilizado es el algoritmo de Metropolis-Hastings. Metropolis *et al.* (1953) and Hastings (1970).³

³Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H. and Teller, E. (1953): Equations of State Calculations by Fast Computing Machines. *Journal of Chemical Physics*, 21(6), 1087–1092. Hastings, W.K. (1970): Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications. *Biometrika* 57(1), 97–109.