

Cuaderno de Laboratorio de FÍSICA  
Primer curso de Ciencias Ambientales  
Prácticas de Laboratorio

Departamento de Física Aplicada  
Universidad de Huelva

10 de abril de 2007

# Índice general

<b>1. Presentación de las prácticas</b>	<b>3</b>
1.1. ¿Qué se debe incluir en la memoria de una práctica? . . . . .	3
1.2. Unidades . . . . .	3
1.3. Recogida de datos . . . . .	4
1.4. Gráficas . . . . .	5
<b>2. Teoría de errores</b>	<b>7</b>
2.1. Introducción . . . . .	7
2.1.1. Error absoluto y relativo . . . . .	8
2.1.2. Errores de los aparatos . . . . .	9
2.2. Cifras significativas y redondeo . . . . .	10
2.3. Estadística de la medida . . . . .	12
2.4. Distribuciones . . . . .	13
2.5. Cálculo del valor asignado y su indeterminación absoluta . . .	13
2.6. Propagación de errores en medidas indirectas . . . . .	16
2.7. Recta de regresión: Ajuste de curvas y método de los mínimos cuadrados . . . . .	18
2.7.1. Ajuste de curvas . . . . .	18
2.7.2. Método de mínimos cuadrados . . . . .	19
2.7.3. Recta de regresión . . . . .	19
2.8. Bibliografía . . . . .	22
2.9. Ejercicios propuestos . . . . .	23
<b>3. Calorimetría: Cálculo del equivalente en agua de un calorí- metro y del calor específico de un líquido</b>	<b>29</b>
3.1. Fundamento teórico . . . . .	29
3.1.1. Cálculo del equivalente en agua del calorímetro . . . . .	30
3.1.2. Cálculo del calor específico de una sustancia problema	31
3.2. Objetivos . . . . .	31
3.3. Material empleado . . . . .	31
3.4. Realización . . . . .	32
3.4.1. Equivalente en agua . . . . .	32
3.4.2. Calor específico sustancia problema . . . . .	32

3.5. Resultados y discusión . . . . .	33
3.6. Cuestiones propuestas . . . . .	33
<b>4. Experiencia con resortes: comprobación de la ley de Hooke</b>	<b>39</b>
4.1. Fundamento teórico . . . . .	39
4.2. Objetivos . . . . .	40
4.3. Material empleado . . . . .	41
4.4. Realización . . . . .	41
4.5. Resultados y discusión . . . . .	42
4.6. Cuestiones propuestas . . . . .	42
<b>5. Velocidad límite: viscosidad de un líquido</b>	<b>48</b>
5.1. Introducción . . . . .	48
5.2. Fundamento teórico . . . . .	48
5.2.1. Velocidad límite en caída libre . . . . .	49
5.2.2. Trayectoria de la caída libre . . . . .	50
5.3. Objetivos . . . . .	50
5.4. Material empleado . . . . .	51
5.5. Realización . . . . .	51
5.6. Resultados y discusión . . . . .	52
5.7. Cuestiones propuestas . . . . .	52
<b>6. Teoría elemental de circuitos: comprobación de la ley de Ohm y de las leyes de Kirchoff</b>	<b>58</b>
6.1. Fundamento e introducción . . . . .	58
6.1.1. Ley de Ohm . . . . .	58
6.1.2. Conexión de resistencias en serie . . . . .	58
6.1.3. Conexión de resistencias en paralelo . . . . .	59
6.1.4. Leyes de Kirchoff . . . . .	60
6.2. Objetivos . . . . .	60
6.3. Material empleado . . . . .	61
6.4. Realización . . . . .	61
6.5. Cuestiones propuestas . . . . .	64

# Capítulo 1

## Presentación de las prácticas

En esta primera práctica daremos algunas instrucciones a las que es necesario prestar atención para lograr una presentación adecuada de los resultados obtenidos en el laboratorio.

### 1.1. ¿Qué se debe incluir en la memoria de una práctica?

La memoria de una práctica de laboratorio NO consiste simplemente en copiar el boletín entregado. En su lugar debe realizarse una breve narración de lo que se hizo en el laboratorio para obtener los resultados. Informar claramente de cuál es el objetivo de la práctica, qué magnitudes se midieron, con qué fin y cuáles fueron los resultados obtenidos. Lo principal es una correcta presentación de los datos obtenidos y del resultado final, siendo posible omitir los pasos intermedios cuando estos sean evidentes. Es necesario incluir información suficiente para permitir al profesor seguir el proceso y repetir los cálculos y el análisis de datos que se lleven a cabo en la práctica.

### 1.2. Unidades

**TODOS** los datos deberán ir acompañados de sus correspondientes unidades, salvo, por supuesto, aquellos que correspondan a magnitudes adimensionales. En el siguiente capítulo se dará una introducción a la *Teoría de errores*. A continuación damos las normas básicas necesarias para una correcta presentación de los datos (medidas, resultados intermedios o resultados finales) que aparezcan en la práctica.

Sea un dato  $M$ , su error absoluto  $E$  y su unidad  $U$  el dato deberá expresarse como

$$M \pm EU \quad . \quad (1.1)$$

Como veremos más adelante esto implica que el valor verdadero  $M_v$  se encuentra en el intervalo  $M - E \leq M_v \leq M + S$ .

**Ejemplo:** La forma correcta de incluir en la práctica la medida de una longitud  $L$  de valor  $16\text{ mm}$  con un error de  $1\text{ mm}$  sería

$$L = 16 \pm 1\text{ mm} \quad . \quad (1.2)$$

En este caso el error y la magnitud medida tienen las mismas unidades, caso de que estas fueran diferentes habría que indicarlas por separado

$$L = 16\text{ cm} \pm 1\text{ mm} \quad , \quad (1.3)$$

aunque *es preferible que coincidan*.

Cuando se incluyen una serie de medidas del mismo tipo, la unidad puede expresarse colectivamente tras las medidas y entre paréntesis.

**Ejemplo:**

$$16,2, 14,5, 15,2, 17, 18,54\text{ (mm)} \quad . \quad (1.4)$$

En una tabla de valores las unidades deben incluirse entre paréntesis en el encabezado de la tabla, acompañando al nombre de la magnitud tabulada.

**Ejemplo:**

I (A)	V (mV)
1.2	2.5
1.3	2.8
1.5	3.1
1.7	3.5
1.9	3.8

Como veremos más adelante, en una gráfica las magnitudes se incluyen de forma similar. En los extremos de los ejes se indicará el nombre de la magnitud acompañado de la unidad entre paréntesis.

Las unidades que deben emplearse de forma preferente son las del sistema internacional ( $SI$ ), basado en el kilogramo ( $kg$ ), metro ( $m$ ), segundo ( $s$ ), amperio ( $A$ ) y Kelvin ( $K$ ). Hay que utilizar las abreviaturas estándar de estas unidades, sin emplear punto tras ellas. Así, una medida de tres segundos sería incorrecto escribirla como “3seg.”, o una de un amperio como “1Amp.”. La forma correcta es “3s” y “1A”.

### 1.3. Recogida de datos

Algunas normas básicas a tener en cuenta en el laboratorio para una correcta recogida de datos experimentales son las siguientes.

- Anotar alguna indicación del aparato con el que se realizan las medidas y su precisión.
- Evitar la toma de datos en papeles en sucio. Anotar desde un principio en el cuaderno de laboratorio.
- No haga cálculos de medidas indirectas mientras realiza las medidas de la práctica.
- Los registros de los aparatos deben realizarse mediante tablas en la forma descrita con anterioridad.
- Utilizar la notación científica cuando aparezcan números muy grandes o pequeños al medir. Si la potencia es la misma para todos los valores medidos puede colocarse en el encabezamiento de la tabla y omitirse en las medidas.

## 1.4. Gráficas

Las gráficas son un elemento muy importante en la presentación de una memoria de prácticas y se les ha de prestar especial atención.

La variable independiente (relacionada con la causa física) se tomará en el eje de abcisas mientras que la variable dependiente (relacionada con el efecto físico) se representará sobre el eje de ordenadas. Los ejes de abcisas y ordenadas deberán etiquetarse adecuadamente, con el nombre (o símbolo) de la magnitud física representada acompañado de la unidad correspondiente entre paréntesis.

Los intervalos en abcisas y ordenadas se tomarán de forma que la gráfica ocupe por completo el papel milimetrado. Para que esto se cumpla es, en general, necesario utilizar escalas diferentes en los ejes de abcisas y ordenadas, y el origen de la escala puede no coincidir con el cero del eje correspondiente. No hay que indicar todos los valores de los datos representados sobre los ejes, aunque sí la escala.

Cuando sea preciso trazar una *recta de mejor ajuste* o *recta de regresión* a los datos experimentales, esta se indicará junto con los puntos. En la siguiente sección se explicará la forma de calcular la recta de regresión. Para dibujarla se tomarán dos puntos que estén dentro del intervalo de representación,  $x_1$  y  $x_2$ , en el eje de abcisas ( $OX$ ) y se calcularán los correspondientes valores  $y_1$  e  $y_2$ . Se marcarán estos puntos y se trazará la recta que los une. Estos dos puntos se borrarán al terminar pues no son datos experimentales. **NO** trazar la recta de mínimos cuadrados “a ojo”.

Como veremos en la siguiente sección es posible que alguno de los puntos experimentales muestre un comportamiento muy diferente al resto. En ese caso es conveniente ignorarlo a la hora de hacer los cálculos, lo que debe indicarse tanto en el texto de la memoria como en la gráfica, rodeando con

un círculo el correspondiente dato experimental. Es por esto que en general es aconsejable representar en primer lugar los puntos y a continuación hacer los cálculos.

Toda gráfica debe numerarse y acompañarse de un título que explique lo representado.

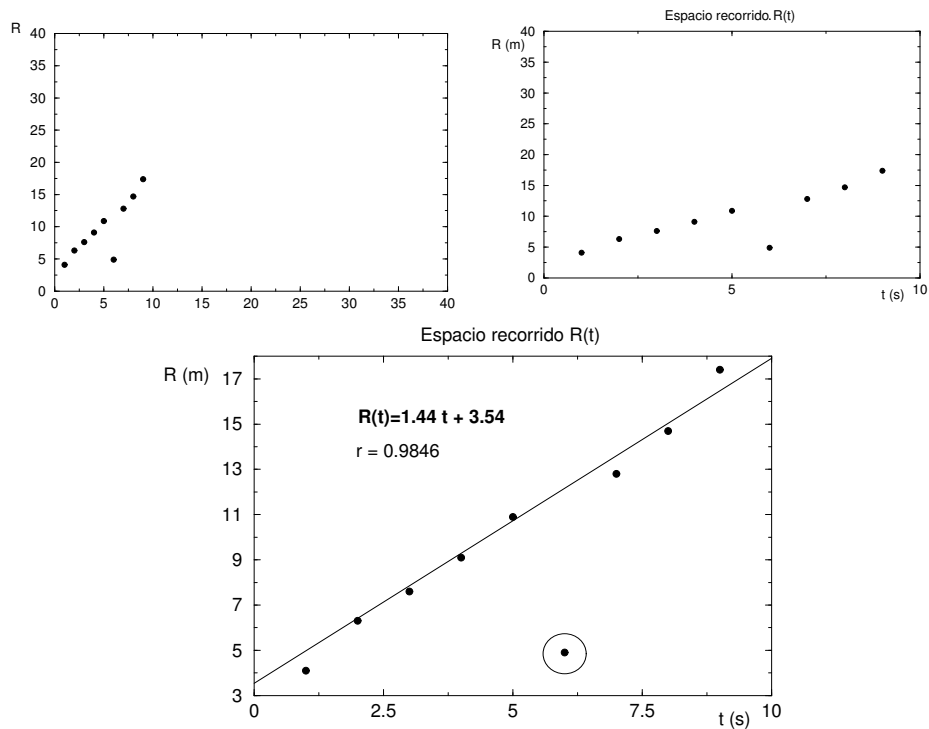
**Ejemplo:**

Los datos obtenidos al medir la posición que ocupa un móvil en cada instante  $t$  se recogen en la siguiente tabla de valores.

t (s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r (m)	4.1	6.3	7.6	9.1	10.9	4.9	12.8	14.7	17.4

Suponemos que se trata de un movimiento rectilíneo y uniforme, por lo que seguirá la fórmula  $R(t) = R_0 + vt$ , vamos a representar la gráfica de los puntos experimentales, y a calcular su velocidad como la pendiente de la recta de mejor ajuste.

Algunos ejemplos de los errores anteriormente citados pueden verse en las dos gráficas que siguen, mientras que la representación correcta sería la de la figura 1.1.



Cuadro 1.1:

## Capítulo 2

# Teoría de errores

### 2.1. Introducción

Al medir **cuantificamos** nuestra experiencia del mundo exterior. Asignamos valores numéricos a magnitudes físicas, lo que conlleva la comparación con alguna magnitud de referencia. En el proceso de medida es de vital importancia tener en cuenta que las medidas que realicemos no son números exactos. Lo que realmente conocemos es un *intervalo* dentro del que esperamos que se encuentre el **valor verdadero** de la magnitud medida. Llamamos **valor verdadero** al valor que obtendríamos si al medir dispusiésemos de técnicas e instrumentos perfectos. Por su definición el valor verdadero resulta inalcanzable, en su lugar el proceso de medida nos proporciona un valor que esperamos cercano al verdadero junto a su **incertidumbre**. El valor de la incertidumbre o error nos dice lo cerca que estamos del valor verdadero. Esto implica que toda medida que no va acompañada del correspondiente error es incompleta. Por supuesto, siguiendo las normas explicadas en la sección anterior además del error las medidas deben ir acompañadas de sus correspondientes unidades.

Atendiendo a su origen existen dos tipos de errores:

- **Errores sistemáticos:** Son errores que se desvían del valor verdadero siempre en un mismo sentido. En general se deben a fallos del instrumental o método utilizado. Como ejemplo de estos errores podemos tomar el llamado *error de cero*, que consiste en que un aparato no marca cero cuando debería, o una mala calibración del instrumento de medida. Si una fuente de error sistemático ha sido identificada sus efectos deben ser eliminados restándolos de las medidas. Estos errores deben ser minimizados en lo posible, aunque no siempre son evidentes.
- **Errores accidentales o estadísticos:** Son aquellos errores que afectan a la medida una vez eliminados los errores sistemáticos. Su característica más importante es que son aleatorios pues se deben a causas



imprevisibles. Esto hace que produzcan una dispersión de los resultados en torno al valor verdadero, lo que permite su tratamiento con métodos estadísticos en la llamada **Teoría de errores**. Un ejemplo de este tipo de errores serían las fluctuaciones en el voltaje proporcionado por la red eléctrica.

Algunos conceptos relativos al instrumento de medida que es importante tener claro son los siguientes:

- **Precisión:** Está relacionada con la magnitud del error que se obtiene cuando se mide una cantidad, sin tener que ver con lo cerca o lejos que la medida obtenida esté del correspondiente valor verdadero. Es decir, al aumentar la precisión de un aparato se minimiza el error accidental cometido. Por ejemplo, una regla con divisiones de milímetros es más precisa que una escalada en centímetros.
- **Exactitud:** A diferencia del caso anterior un aparato es más exacto cuanto más se minimizan los errores sistemático aparejados. Esto quiere decir que la exactitud de un aparato está relacionada con la proximidad del valor medido al valor verdadero, encontrándose este último dentro del intervalo que marca el error del aparato.
- **Sensibilidad:** La sensibilidad de un aparato se incrementa conforme es capaz de detectar variaciones más pequeñas de la magnitud medida.
- **Fidelidad:** La fidelidad de un aparato la marca su capacidad de obtener resultados idénticos al realizar medidas de una cantidad en las mismas condiciones. Se relaciona con el grado de reproducibilidad de las medidas.

Son especialmente importantes los conceptos de precisión y exactitud. De nada sirve una medida extremadamente precisa cuando no se aproxima al valor verdadero. El caso contrario es igualmente negativo, medidas que contengan al valor verdadero pero cuya precisión sea tan pequeña que hagan inútil la información transmitida. En general, al hablar del error o la incertidumbre de una medida nos estamos refiriendo a su *precisión*.

### 2.1.1. Error absoluto y relativo

Definiremos a continuación dos conceptos de gran importancia como son el **error absoluto** y el **error relativo**, que no se deben confundir nunca.

Como hemos dicho anteriormente, al medir cuantificamos una magnitud física, cuantificación que conlleva cierta incertidumbre. Si llamamos  $A$  al valor verdadero de una magnitud, en general desconocido, y  $a$  al valor asignado en el proceso de medida se define el **error absoluto** (también llamado **incertidumbre absoluta**) como la *diferencia entre el valor verdadero y el valor*

*asignado*, y lo denotaremos como  $E_a$  (otras formas de de notación utilizadas son  $\delta_a$  o  $\Delta a$ )

$$E_a = A - a \quad . \quad (2.1)$$

Si, por ejemplo, estamos midiendo la longitud de una regla de  $10\text{ cm}$  y obtenemos un valor para la medida de  $10,1\text{ cm}$  entonces la incertidumbre absoluta es  $0,1\text{ cm}$ . Es importante tener en cuenta que **el error absoluto tiene las mismas unidades que la magnitud medida**.

En general, al no conocerse el valor verdadero de la magnitud medida, es imposible calcular el valor de la imprecisión absoluta. Métodos estadísticos nos permitirán una estimación de esta imprecisión absoluta.

Como vimos en la práctica anterior la forma correcta de expresar un resultado es  $a \pm E_a U$  donde  $U$  es la unidad correspondiente. Esto quiere decir que el valor verdadero de la magnitud que estamos midiendo se encuentra en el intervalo comprendido entre  $a - E_a U$  y  $a + E_a U$ .

Una notación alternativa para una medida y su error es como  $a(E_a) U$ , donde se incluyen en el paréntesis únicamente la cifras significativas del error absoluto. Por ejemplo, si hubieramos obtenido en la medida de una longitud un valor estimado de  $13,52\text{ cm}$  con una incertidumbre absoluta de  $2,1\text{ mm}$  la forma correcta de escribir esta medida sería como

$$13,52 \pm 0,21\text{ cm} \quad , \quad (2.2)$$

o alternativamente como

$$13,52(21)\text{ cm} \quad . \quad (2.3)$$

El **error relativo** se define como *el cociente entre la imprecisión absoluta y el valor verdadero*. Por definición el error relativo es ADIMENSIONAL, esto es, no tiene unidades. Puede expresarse tal cual o como un porcentaje, multiplicándolo por 100. La notación usual para el error relativo de una magnitud  $a$  es  $\epsilon_a$ .

**Ejemplo:**

Si medimos el valor de la constante  $\pi = 3,1415927\dots$  y obtenemos como resultado  $3,14$  entonces el error absoluto será  $E_\pi = 0,0015927\dots$  y el relativo  $\epsilon_\pi = E_\pi/\pi \simeq 0,0005$ , también pudiendo indicarse que el error relativo es del  $0,05\%$ .

### 2.1.2. Errores de los aparatos

Como hemos indicado anteriormente, consideraciones estadísticas nos permitirán estimar los errores de nuestra medida, pero este estudio estadístico será posible cuando se disponga de varias medidas de una misma magnitud. Sin embargo, existen situaciones en los que esto no es posible y se dispone de una sola medida de la magnitud de interés. En ese caso se aplicará el criterio siguiente:

- Si la medida se ha realizado con un aparato **analógico** (basado en escala graduada) se tomará como error absoluto la mitad de la precisión del aparato. Se llama *precisión* de un aparato de medida a la mínima medida que este puede registrar.
- Si la medida se ha realizado con un aparato **digital** en este caso se toma como error absoluto directamente la precisión del aparato.

Cuando se han realizado varias medidas se realiza un tratamiento estadístico de las mismas que veremos más adelante.

## 2.2. Cifras significativas y redondeo

La precisión de una medida está relacionada con el número de dígitos que se incluyen en el resultado. Se llaman **cifras significativas** de un número a aquellas que determinan su valor, y cifras no significativas a aquellas que sólo nos dan una idea de su orden de magnitud. Para calcular el número de cifras significativas de un número podemos seguir el siguiente procedimiento

1. Llamamos cifra más significativa al primer dígito que sea diferente de cero *por la izquierda*.

**Ejemplo:** 251,3  $\rightarrow$  2

2. Si el número no incluye decimales, el primer dígito diferente de cero empezando *por la derecha* es la cifra menos significativa.

**Ejemplo:** 2570  $\rightarrow$  7

3. Si existen decimales la cifra menos significativa es la primera por la derecha *incluso si esta es un cero*.

**Ejemplo:** 2514,790  $\rightarrow$  0

4. Todos los dígitos entre la cifra más significativa y la menos significativa, incluyendo a estas dos, se cuentan como cifras significativas.

**Ejemplo:** Todos los números indicados a continuación poseen cuatro cifras significativas

$$1,051 \quad 1154. \quad 123,5 \quad 234500 \quad 10,10 \quad 0,002222 \quad . \quad (2.4)$$

La misma medida puede expresarse en diferentes escalas, pero el número de cifras significativas ES SIEMPRE EL MISMO. No depende de en qué escala expresemos nuestra medida. Se debe usar preferentemente la NOTACIÓN CIENTÍFICA, que resulta de obligatorio uso al escribir números muy grandes o pequeños.

**Ejemplo:**

$$\begin{aligned} 15,4 \text{ Km} &= 15400 \text{ m} = 1,54 \cdot 10^7 \text{ mm} \\ 0,12 \mu\text{F} &= 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ mF} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ F} \end{aligned}$$

Es importante tener en cuenta que, a la luz de lo explicado hasta ahora, por ejemplo

$$451 \text{ mm} \neq 451,0 \text{ mm} \quad , \quad (2.5)$$

pues el segundo número tiene una cifra significativa más que el primero.

Una vez que conocemos nuestra medida y su error, hay que **redondear** ambos adecuadamente. La razón del redondeo estribará en que si, por ejemplo, el error afecta a la segunda cifra decimal de nuestro resultado, no tiene ningún sentido presentar la medida con ocho decimales. Serán incorrectos pues el error cometido hace que se desconozcan.

Para conservar un cierto número de cifras significativas de la medida debe redondearse adecuadamente siguiendo las reglas siguientes:

- Si la cifra siguiente a la última que se conserva es inferior a cinco no se hace ningún cambio.
- Si la cifra siguiente a la última que se conserva es superior a cinco se suma una unidad a la última cifra.
- Si la cifra siguiente a la última que se conserva es cinco se aumenta en una unidad cuando el dígito que se conserva es impar y no se varía si es par.

**Ejemplo:**

Si redondeamos dejando sólo dos cifras significativas en los números que dimos antes como ejemplo:

$$1,051 \quad 1154. \quad 123,5 \quad 234500 \quad 10,10 \quad 0,002222 \quad , \quad (2.6)$$

obtenemos

$$1,1 \quad 1200 \quad 120 \quad 230000 \text{ (Más correctamente: } 2,3 \cdot 10^5) \quad 10 \quad 0,0022 \quad . \quad (2.7)$$

El número de cifras que se incluyen en un resultado debe ser aproximadamente una más que las que indique la precisión. Para redondear adecuadamente los resultados experimentales se siguen los pasos que reseñamos a continuación

1. Redondeamos el error teniendo en cuenta sus dos primeras cifras significativas. Si estas forman un número menor que 25 se conservan ambas, mientras que si el número es mayor se redondea a una cifra significativa.

- Una vez redondeado el error debe redondearse la magnitud. Deben retenerse cifras hasta la última cifra significativa retenida para el error. El resto de cifras deben despreciarse, con cuidado de redondear adecuadamente la última cifra.
- Por último se expresan conjuntamente la cantidad y sus unidades.

**Ejemplo:**

Supongamos que una medida indirecta de presión nos da como resultado

$$P = 12,343256367 \text{ Pa} \quad , \quad (2.8)$$

en la tabla 2.1 analizamos como se expresaría correctamente este resultado para seis valores diferentes de la incertidumbre absoluta.

$E_P$ (Pa)	Redondeo $E_P$ (Pa)	Redondeo resultado (Pa)	Resultado final
0,002155	0,0022	12,3433	$12,3433 \pm 0,0022 \text{ Pa}$ $12,3433(22) \text{ Pa}$
0,055623	0,06	12,34	$12,34 \pm 0,06 \text{ Pa}$ $12,34(6) \text{ Pa}$
0,62158	0,6	12,3	$12,3 \pm 0,6 \text{ Pa}$ $12,3(6) \text{ Pa}$
10,8111	11	12	$12 \pm 11 \text{ Pa}$ $12(11) \text{ Pa}$
3,457233	3	12	$12 \pm 3 \text{ Pa}$ $12(3) \text{ Pa}$
0,09665	0,10	12,34	$12,34 \pm 0,10 \text{ Pa}$ $12,34(10) \text{ Pa}$

Cuadro 2.1:

### 2.3. Estadística de la medida

Supongamos que hemos conseguido reducir las fuentes de error de nuestro experimento a las puramente accidentales, librándonos de las sistemáticas. La existencia de estos errores aleatorios harán que cada vez que midamos la variable física que nos interesa obtengamos valores que pueden ser diferentes. Estos resultados se repartirán alrededor del *valor verdadero* de la magnitud, que desconocemos, obteniéndose a veces valores por encima del mismo y otras por debajo.

**Ejemplo:**

Supongamos que medimos con cronómetros diferentes, el tiempo que tarda en caer desde una altura de  $3,0 \text{ m}$  un cuerpo que parte del reposo al suelo obteniendo así dos conjuntos de medidas,  $T_1$  y  $T_2$ .

$T_1$ (s)	0,80	0,82	0,76	0,76	0,74	0,79	0,77	0,79
$T_2$ (s)	0,9	0,9	0,7	0,8	0,7	0,8	0,7	0,6

Cuadro 2.2:

Por lo tanto a **una** realidad física le corresponde un conjunto de resultados diferentes, conjunto que es finito, pero que idealmente podríamos suponer infinito. La Estadística nos permite afrontar el estudio de estas colecciones de datos y extraer de ellas la información necesaria.

## 2.4. Distribuciones

Los resultados experimentales se reparten alrededor del valor verdadero de acuerdo con lo que se llama en Estadística una *función de distribución* o una *distribución de probabilidad*. Dependiendo del experimento es necesario considerar una determinada función de distribución. Baste por ahora saber que las funciones de mayor interés a la hora de analizar datos experimentales son la *distribución binomial*, la *distribución de Poisson*, la *distribución de Lorentz* y la *distribución normal* o *de Gauss*. Esta última es la distribución más ampliamente usada y la que se ha considerado al derivar los resultados que presentamos en el resto de la práctica.

Por tanto, de ahora en adelante, suponemos que nuestras fuentes de error son las puramente accidentales y que, además, estos errores aleatorios se reparten de acuerdo con la distribución normal. Esto implica que cada error accidental es provocado por un gran número de pequeños errores que a su vez pueden considerarse como accidentales e independientes, y que cada uno de estos pequeños errores aparece con igual probabilidad con signo positivo y negativo.

En la bibliografía que se encuentra al final de la práctica puede encontrarse un tratamiento matemático más completo de este problema.

## 2.5. Cálculo del valor asignado y su indeterminación absoluta

Supongamos que llevamos a cabo un experimento y medimos cierta magnitud física que llamaremos  $y$ . Realizamos  $N = 100$  medidas de dicha magnitud en el laboratorio, obteniendo así una distribución de valores. ¿Cómo damos a conocer ahora nuestros resultados ?

Debemos extraer de nuestras mediciones experimentales una *aproximación* al valor verdadero de la magnitud  $y$ , y estimar el error absoluto que conlleva nuestra aproximación. Buscamos por tanto traducir nuestro conjunto de datos experimentales a la forma *valor*  $\pm$  *error* (sin olvidar las unidades...).

La primera magnitud que nos será de interés es el llamado **valor medio** del conjunto de medidas. Para un conjunto de medidas experimentales  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$  definimos su valor medio, que llamaremos  $\bar{y}$ , como la *media aritmética* de los distintos valores medidos. Es por tanto igual a

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad . \quad (2.9)$$

Una fórmula equivalente a la anterior es la expresada en términos de las frecuencias de cada medida. Si suponemos que al medir  $y$  en  $N$  ocasiones hemos obtenido  $n$  valores diferentes  $y_i, i = 1, \dots, n$ , definimos la frecuencia del  $i$ -ésimo valor como  $P_i = N_i/N$ , donde  $N_i$  es el número de veces que hemos obtenido  $y_i$  al medir y  $N$  el número total de medidas. Podemos entonces escribir la fórmula del valor medio como

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n P_i y_i \quad . \quad (2.10)$$

**Vamos a identificar  $\bar{y}$ , el valor medio de nuestra distribución de medidas, con el valor verdadero de la misma.** En general, cuando las fuentes de error son puramente aleatorias, conforme crece el número  $N$  de medidas se va acercando el valor medio al valor verdadero, identificándose ambos en el caso límite de infinitas medidas.

**Ejemplo:**

Hallamos los valores medios de las distribuciones  $T_1$  y  $T_2$  del ejemplo anterior.

$$\bar{T}_1 = \frac{0,80+0,82+0,76+0,76+0,74+0,79+0,77+0,79}{8} = 0,77875 \text{ s}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_2 &= \frac{0,9+0,9+0,7+0,8+0,7+0,8+0,7+0,6}{8} = 0,7625 \text{ s} \\ &= \frac{2}{8}0,9 + \frac{2}{8}0,8 + \frac{3}{8}0,7 + \frac{1}{8}0,6 = 0,7625 \text{ s} \quad , \end{aligned}$$

donde en el último caso hemos hecho uso de la fórmula que utiliza las frecuencias de cada medida.

Ya tenemos una estimación del valor verdadero, ahora necesitamos una aproximación al error que estamos cometiendo, lo que implica definir algún parámetro que nos permita cuantificar la anchura de nuestra distribución de valores experimentales alrededor del valor medio. Un primer parámetro de interés es la llamada **desviación**. Definimos la **desviación**,  $d_{y_i}$ , de la  $i$ -ésima medida de la magnitud  $y$  como la diferencia entre la medida y el valor medio de la distribución

$$d_{y_i} = y_i - \bar{y} \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad . \quad (2.11)$$

**Ejemplo:**

Las desviaciones  $d_{t_i}$  en los conjuntos  $T_1$  y  $T_2$  son

$$\begin{aligned} T_1(s) \quad d_{t_1} &= 0,80 - 0,77875 = 0,02125, \quad d_{t_2} = 0,04125, \quad \dots, \quad d_{t_8} = 0,011 \\ T_2(s) \quad d_{t_1} &= 0,9 - 0,7625 = 0,1375, \quad d_{t_2} = 0,1375, \quad \dots, \quad d_{t_8} = -0,1625 \end{aligned}$$

Los valores de  $d_{y_i}$  nos proporcionan una idea de la distancia al valor medio de cada medida, pero buscamos un parámetro que nos caracterice la distribución en su conjunto. Para ello se hace uso de la llamada **desviación normal** o **estándar** que escribimos como  $\sigma_y$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_{y_i}^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N-1}} \quad (2.12)$$

Por definición **la desviación estándar tiene las mismas dimensiones que la magnitud medida**, por tanto es conveniente expresarla en idénticas unidades.

**Ejemplo:**

La desviación estándar de nuestros dos conjuntos de medidas  $T_1$  y  $T_2$  es

$$\begin{aligned} \sigma_{T_1} &= 0,022 \text{ s} \\ \sigma_{T_2} &= 0,106 \text{ s} \end{aligned}$$

Se llama **varianza** de la distribución al cuadrado de la desviación estándar,  $\sigma_y^2$ .

La desviación estándar sí nos da idea de la anchura de la distribución de valores medidos. Sin embargo, consideraciones estadísticas hacen que estimemos la incertidumbre absoluta de nuestra medición no a través de la desviación estándar definida anteriormente, sino de la **desviación estándar del valor medio**,  $\sigma_{\bar{y}}$ , que definimos como

$$\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N(N-1)}} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{N}} \quad (2.13)$$

Como se aprecia en su definición, la desviación estándar del valor medio,  $\sigma_{\bar{y}}$  es siempre menor que la desviación estándar  $\sigma_y$  y posee las mismas dimensiones. Este parámetro está relacionado con la anchura de la distribución de valores medios que se obtendría si se repitiera varias veces la colección de un conjunto de datos calculando cada vez la media (Ver bibliografía). Este es el parámetro que asociaremos con la incertidumbre de nuestra medida.



Por tanto cuando dispongamos de un conjunto de medidas de una magnitud  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$ , expresaremos el resultado de esas medidas como

$$y \pm E_y \Rightarrow \bar{y} \pm \sigma_{\bar{y}} \quad , \quad (2.14)$$

y el error relativo será

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}} \quad . \quad (2.15)$$

**Ejemplo:**

Expresamos correctamente en la forma resultado  $\pm$  error las medidas de  $T_1$  y  $T_2$ :

$$\begin{aligned} T_1 \quad \sigma_{T_1} = 0,0078 \text{ s} ; \quad T_1 = 0,779 \pm 0,008 \text{ s} \\ \epsilon_{T_1} = 0,010 \simeq 1 \% \\ T_2 \quad \sigma_{T_2} = 0,0375 \text{ s} ; \quad T_2 = 0,76 \pm 0,04 \text{ s} \\ \epsilon_{T_2} = 0,053 \simeq 5 \% \end{aligned}$$

**Ejemplo:**

Al medir  $N = 20$  veces la distancia entre dos puntos se obtienen los valores

$l \text{ (m)}$	2,356	2,357	2,359	2,361	2,362	2,363	2,365
$N_i$	1	2	3	8	4	1	1
$l \text{ (m)}$	2,3605						
$d_l \text{ (m)}$	-0,005	-0,004	-0,002	0,000	0,001	0,002	0,004
$d_l^2 \text{ (m}^2\text{)}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-6}$	0,000	$10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$
$\sigma_l \text{ (m)}$	$4,8 \cdot 10^{-4} \simeq 5 \cdot 10^{-4}$						
Resultado	$2,3605 \pm 0,0005 \text{ m}$						

Para tratar de forma correcta los resultados es necesario tomar en cuenta la posible aparición de **errores sistemáticos** y también el **error de escala**. Si se supone que se ha conseguido eliminar por completo los errores sistemáticos, **el error total nunca deberá ser menor que el error de escala**.

## 2.6. Propagación de errores en medidas indirectas

En general los resultados obtenidos a través de las medidas llevadas a cabo (*medidas directas*) son manipuladas matemáticamente para el cálculo de otras magnitudes de interés (*medidas indirectas*). Tendremos que aprender como *propagar* el error de las medidas directas a las indirectas. Es decir, analizaremos en este apartado qué error se comete al calcular una magnitud

a partir de valores de otras magnitudes que a su vez están afectadas de cierta incertidumbre.

A continuación veremos cómo calcular el error de una función de dos variables, cada una de las cuales tiene un error asignado. Generalizaremos al caso de  $n$  variables, siendo el caso de una variable un límite trivial de los anteriores.

Supongamos que  $z = f(x, y)$  es una función de dos variables independientes<sup>1</sup>. Un ejemplo de función de dos variables puede ser el periodo  $T$  de un péndulo matemático, que podemos considerar función de la longitud  $l$  del péndulo y del valor de la aceleración de la gravedad  $g$  en el lugar donde se encuentra el péndulo:  $T = f(l, g)$ .

Para una función de dos variables  $z = f(x, y)$  la desviación estándar del valor medio de  $z$  es

$$\sigma_z^2 = \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{\bar{x}\bar{y}}^2 \sigma_{\bar{x}}^2 + \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{\bar{x}\bar{y}}^2 \sigma_{\bar{y}}^2 \quad . \quad (2.16)$$

Tomando la raíz cuadrada obtendríamos el error correspondiente. Generalizando para una función de  $n$  variables  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tenemos

$$\sigma_z = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{\bar{x}}^2 \sigma_{\bar{x}_j}^2} \quad , \quad (2.17)$$

donde  $\left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{\bar{x}}$  es la derivada parcial de  $f$  respecto a  $x_j$  evaluada para  $x_1 = \bar{x}_1$ ,  $x_2 = \bar{x}_2, \dots, x_n = \bar{x}_n$ . En el cuadro 2.3 se presentan los resultados para la propagación de errores para algunas de las funciones más frecuentes.

Relación	Error
$z = \exp(x)$	$\sigma_z^2 = \exp(2x)\sigma_x^2$
$z = \ln(x)$	$\sigma_z^2 = \frac{\sigma_x^2}{x^2}$
$z = x \pm y$	$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$
$z = xy$	$\frac{\sigma_z^2}{z^2} = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2}$
$z = x/y$	$\frac{\sigma_z^2}{z^2} = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2}$

Cuadro 2.3:

### Ejemplo:

Supongamos que nos piden calcular la densidad de una pieza homogénea de forma cónica sabiendo que su masa es  $m = 300,23 \pm 0,05 \text{ g}$ , su altura  $h = 12,3 \pm 0,1 \text{ cm}$  y el radio de la base  $r = 7,44 \pm 0,01 \text{ cm}$ .

<sup>1</sup>Que las variables sean independientes básicamente quiere decir que una no se ve afectada por cambios en la otra.

La densidad es igual al cociente de la masa entre el volumen de la pieza (al ser esta homogénea) luego

$$\rho = \rho(m, h, r) = \frac{m}{\pi r^2 h / 3} = 0,42109 \text{ g/cm}^3 \quad . \quad (2.18)$$

Calculamos a continuación las derivadas parciales necesarias para el cálculo del error

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial m} &= \frac{3}{\pi r^2 h} \quad ; \quad \left( \frac{\partial \rho}{\partial m} \right)_{\bar{m}, \bar{r}, \bar{h}} = 1,40310^{-3} \text{ cm}^{-3} \\ \frac{\partial \rho}{\partial h} &= -\frac{3m}{\pi r^2 h^2} \quad ; \quad \left( \frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_{\bar{m}, \bar{r}, \bar{h}} = -3,4210^{-2} \text{ g/cm}^4 \\ \frac{\partial \rho}{\partial r} &= -\frac{6m}{\pi r^3 h} \quad ; \quad \left( \frac{\partial \rho}{\partial r} \right)_{\bar{m}, \bar{r}, \bar{h}} = -1,13210^{-1} \text{ g/cm}^4 \quad , \end{aligned}$$

y substituyendo en la fórmula del error obtenemos

$$\sigma_{\bar{\rho}} = \sqrt{(1,403 \cdot 10^{-3})^2 0,05^2 + (-3,42 \cdot 10^{-2})^2 0,1^2 + (-1,132 \cdot 10^{-1})^2 0,01^2} = 0,003603 \text{ g/cm}^3 \quad , \quad (2.19)$$

y el resultado final sería

$$\rho = 0,421 \pm 0,004 \text{ g/cm}^3 \quad . \quad (2.20)$$

## 2.7. Recta de regresión: Ajuste de curvas y método de los mínimos cuadrados

### 2.7.1. Ajuste de curvas

Siendo una herramienta de gran ayuda, la estimación mediante métodos gráficos no proporciona resultados precisos. Es necesario un procedimiento matemático que nos permita identificar *la mejor curva* para un conjunto dado de datos experimentales. Por supuesto es necesario definir un criterio claro de lo que queremos decir al referirnos a la *mejor* curva.

Supongamos que las dos magnitudes  $X$  e  $Y$  están relacionadas por una fórmula conocida, en la que además intervienen  $r$  parámetros

$$Y = f(X; a_1, \dots, a_r) \quad . \quad (2.21)$$

#### **Ejemplo:**

Algunas de las funciones que más frecuentemente aparecen son

- Recta:  $Y = a_1 X + a_2$
- Parábola:  $Y = a_1 X^2 + a_2 X + a_3$

- Parábola con eje de simetría  $OY$ :  $Y = a_1X^2 + a_3$
- Función proporcional inversa (Hipérbola):  $Y = 1/(a_1X + a_2)$
- Exponencial:  $Y = a_1 \exp(a_2X)$

Una vez que escojamos una forma funcional para la dependencia de  $Y$  frente a  $X$  hemos de determinarla buscando los valores de los  $r$  parámetros  $a_i$  que nos proporcionen el **mejor ajuste** a los datos experimentales.

Si tenemos  $r$  parámetros y medimos  $N = r$  pares  $(X_i, Y_i)$  podríamos plantear un sistema con  $r$  ecuaciones y  $r$  incógnitas y resolverlo para determinar nuestros parámetros. Sin embargo, para reducir la influencia de errores experimentales y, sobre todo, si se quiere investigar si la función escogida es adecuada o no, es necesario realizar un mayor número de medidas:  $N > r$ .

Ahora bien, si  $N > r$  entonces tenemos un mayor número de ecuaciones que de incógnitas y en general se nos plantea un sistema incompatible que no podemos resolver. Buscamos entonces un criterio que permita hallar unos parámetros óptimos.

### 2.7.2. Método de mínimos cuadrados

Este método proporciona una forma sistemática de buscar los parámetros para optimizar el acuerdo de una función con un conjunto de datos experimentales. El método plantea que los parámetros óptimos son aquellos que minimizan  $\chi^2$  (chi-cuadrado)<sup>2</sup> que se define como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{f(X_i; a_1, \dots, a_r) - Y_i}{E_{Y_i}} \right]^2, \quad (2.22)$$

donde  $N$  es el número de medidas experimentales. En la bibliografía se puede encontrar una completa introducción al problema de estimar adecuadamente el grado de confianza que puede asignarse a un ajuste, un tema que va más allá del objetivo de esta práctica.

Al imponer la condición de mínimo sobre  $\chi^2$ , anulando las primeras derivadas respecto a cada uno de los parámetros, se obtienen  $r$  ecuaciones con  $r$  incógnitas, cuya solución nos da los parámetros buscados.

Estos son los principios generales del método de mínimos cuadrados. A continuación vamos a dar las fórmulas para el caso en que la función  $f$  sea un polinomio de primer grado, esto es, una recta.

### 2.7.3. Recta de regresión

En este apartado se dan las fórmulas necesarias para el cálculo de la **recta de mejor ajuste** o **recta de regresión**,  $Y = f(X; a, b) = aX + b$ , a un

---

<sup>2</sup>En la bibliografía puede encontrarse un tratamiento más completo de este tema, que sólo trataremos someramente.

conjunto de  $N$  datos experimentales. Este es el caso más práctico, y conlleva un álgebra menos engorrosa que el resto de funciones posibles. Vamos a suponer que el error de la magnitud física  $X$  es despreciable, mientras que los errores para todos los valores de  $Y$  son idénticos. Para casos más complejos puede consultarse la bibliografía.

Según el método de mínimos cuadrados hemos de minimizar

$$\begin{aligned}\chi^2(a, b) &= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{(aX_i + b) - Y_i}{E_{Y_i}} \right]^2 \\ &= \frac{1}{E_Y^2} \sum_{i=1}^N [(aX_i + b) - Y_i]^2 \quad ,\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta la igualdad de los errores de la magnitud  $Y$ . Imponiendo las condiciones de mínimo

$$\frac{\partial \chi^2(a, b)}{\partial a} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \chi^2(a, b)}{\partial b} = 0 \quad , \quad (2.23)$$

y resolviendo las dos ecuaciones que resultan, obtenemos que los valores de la pendiente y la ordenada en el origen son

$$\begin{aligned}a &= \frac{NS_{xy} - S_x S_y}{NS_{x^2} - (S_x)^2} \\ b &= \frac{S_{x^2} S_y - S_x S_{xy}}{NS_{x^2} - (S_x)^2} \quad ,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}S_x &= \sum_{i=1}^N X_i \quad ; \quad S_y = \sum_{i=1}^N Y_i \\ S_{x^2} &= \sum_{i=1}^N X_i^2 \quad ; \quad S_{y^2} = \sum_{i=1}^N Y_i^2 \\ S_{xy} &= \sum_{i=1}^N X_i Y_i \quad .\end{aligned}$$

Se puede demostrar fácilmente que la recta de regresión pasa por el punto  $(\bar{X}, \bar{Y})$  luego una vez calculada la pendiente de la recta es muy fácil calcular la ordenada en el origen despejando de  $\bar{Y} = a\bar{X} + b$ .

Una idea de lo cercanos que están nuestros puntos experimentales a una recta, es decir, de lo correcto que es aproximar el comportamiento de  $Y$  frente a  $X$  como un polinomio de primer grado, nos lo proporciona el llamado

**coeficiente de correlación** ( $r$ ) cuya expresión viene dada por

$$r = \frac{NS_{xy} - S_x S_y}{\sqrt{(NS_{x^2} - S_x^2)(NS_{y^2} - S_y^2)}} \quad . \quad (2.24)$$

El módulo del coeficiente de correlación varía entre cero y uno:  $0 \leq |r| \leq 1$ . Cuando los puntos se encuentran muy próximos a una recta el coeficiente de correlación es muy próximo a 1 ( $-1$  si la pendiente de la recta es negativa), cumpliéndose la igualdad únicamente en el caso de un alineamiento perfecto. Un valor de  $r$  próximo a cero quiere decir que se ha obtenido un mal ajuste y los puntos siguen una función diferente a la recta. Al escribir el coeficiente de correlación de un ajuste lineal *no debe aproximarse a  $\pm 1$* , y debe darse hasta la primera cifra que resulte diferente de nueve.

También se puede calcular, mediante propagación de errores en los parámetros calculados, el error de los mismos. Damos únicamente los resultados, sin demostrarlos. La desviación de la pendiente y la ordenada en el origen resultan, en función del coeficiente de correlación

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{a}} &= \frac{a}{r} \sqrt{\frac{1-r^2}{N-2}} \\ \sigma_{\bar{b}} &= \frac{a}{r} \sqrt{\frac{S_{x^2}(1-r^2)}{N(N-2)}} \end{aligned}$$

y el error del parámetro lo tomamos como el valor de la desviación típica.

Es importante dibujar los puntos experimentales antes de calcular la recta de regresión. Esto nos permite eliminar puntos que tengan errores imprevistos y estén fuera de las condiciones experimentales. Además nos permite predecir lo acertado o no de ajustar los datos a una recta.

Aunque  $Y$  dependa de  $X$  de forma más complicada que la lineal, en muchas ocasiones es posible reformular el problema mediante un cambio de variables que nos permita convertirlo de nuevo en el caso lineal presentado.

**Ejemplo:**

Se mide el número de cuentas que registra un detector Geiger a diferentes distancias de una fuente radiactiva, obteniéndose los resultados de la tabla 2.4.

El número de cuentas que registra un detector conforme lo alejamos de una fuente radiactiva es proporcional a la inversa al cuadrado de la distancia detector-fuente<sup>3</sup>. Si representamos directamente el número de cuentas frente a la distancia a la fuente obtenemos la gráfica 2.1, en la que parece que se confirma esa dependencia.

---

<sup>3</sup>Conforme alejamos el detector de la fuente radiactiva el ángulo sólido que presenta la ventana del detector disminuye como  $\frac{1}{r^2}$ .

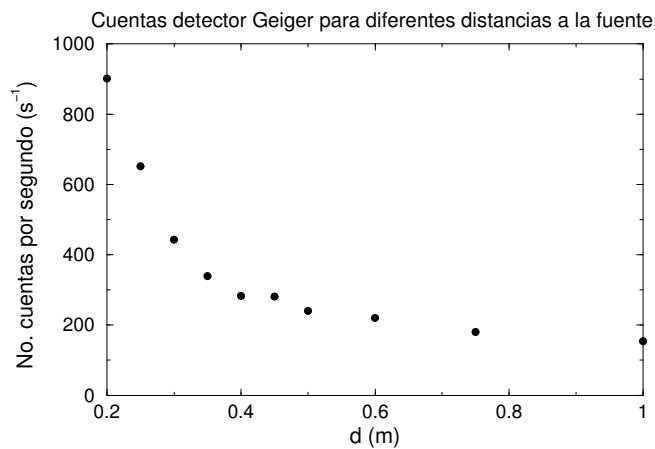


Figura 2.1:

Medida	Distancia $d$ (m)	$1/d^2$ ( $m^{-2}$ )	Cuentas por seg ( $s^{-1}$ )
1	0,20	25,00	901
2	0,25	16,00	652
3	0,30	11,11	443
4	0,35	8,16	339
5	0,40	6,25	283
6	0,45	4,94	281
7	0,50	4,00	240
8	0,60	2,78	220
9	0,75	1,78	180
10	1,0	1,00	154

Cuadro 2.4:

Para hacer un ajuste lineal nos basta entonces representar el número de cuentas frente a *la inversa de la distancia al cuadrado*. De este modo transformamos la dependencia cuadrática en lineal (Ver tabla 2.4). En la tabla 2.5 se encuentran los resultados de la regresión, incluyendo los resultados intermedios para  $S_x$ ,  $S_y$ , etc. que no es necesario especificar en la práctica. El resultado final, con los puntos experimentales y la recta de mejor ajuste se encuentra en la gráfica 2.2.

## 2.8. Bibliografía

Existe una extensa bibliografía sobre *Teoría de errores*. Aunque en algunos libros de Física General se puede encontrar una introducción a este

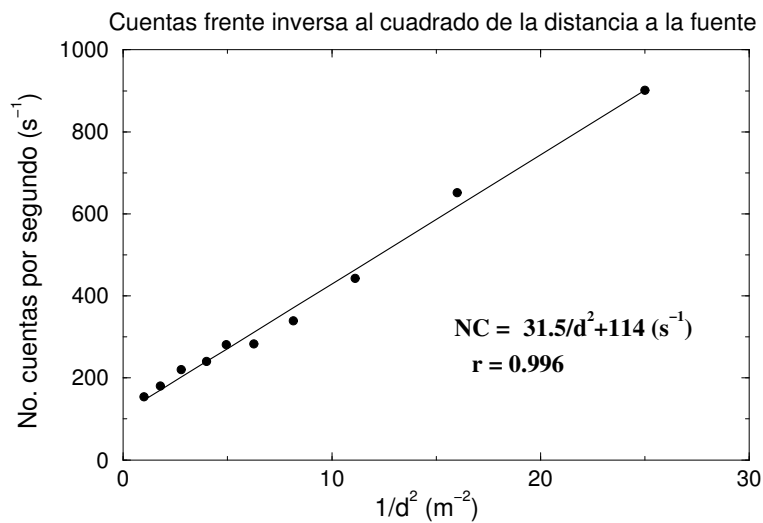


Figura 2.2:

$N$	$S_x$	$S_y$	$S_{x^2}$	$S_{xy}$	$S_{y^2}$
10	81,02	3693	1162,4	$4,585 \cdot 10^4$	$1,869 \cdot 10^6$
	$a \text{ (m}^2\text{/s)}$	$\sigma_a \text{ (m}^2\text{/s)}$	$b \text{ (s}^{-1}\text{)}$	$\sigma_b \text{ (s}^{-1}\text{)}$	$r$
	31,5	1,0	114	11	0,995996

Cuadro 2.5:

tema, los libros de consulta que se sugieren son

- D. C. Baird; *Experimentación, una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*. Ed. Prentice Hall (1991).
- Carlos Sánchez del Río; *Análisis de errores*. Eudema Universidad (1989).
- P. R. Bevington y D. K. Robinson; *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*. Ed. McGraw Hill (1992).
- W. Lichten; *Data and Error Analysis*. Ed. Allyn and Bacon, Inc (1988).
- J. R. de F. Moneo y Gonzalo Madurga; *Los errores en las medidas físicas y ajuste por mínimos cuadrados*. Apuntes departamento Física Atómica Molecular y Nuclear, Universidad de Sevilla.

## 2.9. Ejercicios propuestos

### Ejercicio 1



Si el diámetro de una mesa circular se conoce con un error relativo del 1%, ¿ con qué error relativo se conoce su área? ¿ Sería mejor determinar con un error relativo del 1% el radio de la mesa en vez del diámetro?

### Ejercicio 2

Cuando un rayo de luz incidente que viaja en un medio de índice de refracción  $n_1$  pasa a otro medio con índice de refracción  $n_2$ , el rayo se desvía y se dice que se refracta. El ángulo de refracción depende del ángulo de incidencia y de los índices de refracción de acuerdo con la ley de Snell:  $n_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = n_2 \operatorname{sen} \alpha_2$ , donde todos los ángulos se refieren a la normal al plano de separación entre los medios. Hallar  $n_2$ , su incertidumbre absoluta  $E_{n_2}$  y su incertidumbre relativa  $\epsilon_{n_2}$ , si hemos obtenido en un experimento los siguientes valores para  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $n_1$ .

$$\alpha_1 = 22,3 \pm 0,4^\circ \quad , \quad \alpha_2 = 14,44 \pm 0,15^\circ \quad , \quad n_1 = 1,0003 \pm 0,0005 \quad . \quad (2.25)$$

En el caso que necesitáramos una medida más precisa de la obtenida para  $n_2$ , ¿qué medida sería más efectiva, medir con un error diez veces menor el índice de refracción  $n_1$  o reducir a la mitad el error en la medida de los ángulos? Razona tu respuesta.

**Nota:** El índice absoluto de refracción  $n$  de un medio se define como el cociente de la velocidad de la luz en el vacío ( $c$ ) y la velocidad de la luz en el medio ( $v$ ):  $n = c/v$ . Por tanto es una magnitud adimensional y siempre mayor que uno.

### Ejercicio 3

Suponiendo que el resultado de seis medidas diferentes de los parámetros relevantes de los dos volúmenes de la figura 2.3 se resume en la tabla 2.6; calcular los volúmenes de los dos sólidos, estimando correctamente el error correspondiente. Suponiendo que el cuerpo de forma cúbica es homogéneo y tiene una masa  $m = 100,6 \pm 0,5 \text{ g}$ , calcular su densidad y la incertidumbre que esta lleva asociada.

### Ejercicio 4

Se realizó un experimento para medir la impedancia de un circuito R-L en serie. La impedancia  $Z$  depende de la resistencia  $R$ , la frecuencia de la fuente  $\nu$  y la inductancia  $L$  como

$$Z^2 = R^2 + 4\pi^2 \nu^2 L^2 \quad . \quad (2.26)$$

En el experimento se midió  $Z$  en función de  $\nu$ . Las lecturas obtenidas se dan en la tabla 2.7.

Se supone que todas las medidas de la impedancia están afectadas de una incertidumbre idéntica y que la incertidumbre en la medida de  $\nu$  es despreciable. Todas las unidades del problema se expresan en el SI, donde la unidad de resistencia es el ohmio ( $\Omega$ ) y la de inductancia el henrio ( $H$ ).

Medida	R (mm)	r (mm)	h (cm)	a (cm)	b (cm)	c (cm)
1	48.51	43.42	29.12	2.347	3.737	1.921
2	47.39	42.94	29.14	2.351	3.731	1.919
3	48.81	42.59	28.99	2.348	3.731	1.923
4	47.52	43.11	29.13	2.347	3.732	1.920
5	47.93	42.45	29.13	2.350	3.735	1.919
6	47.88	42.41	29.06	2.351	3.736	1.922

Cuadro 2.6: Resultados de las medidas.

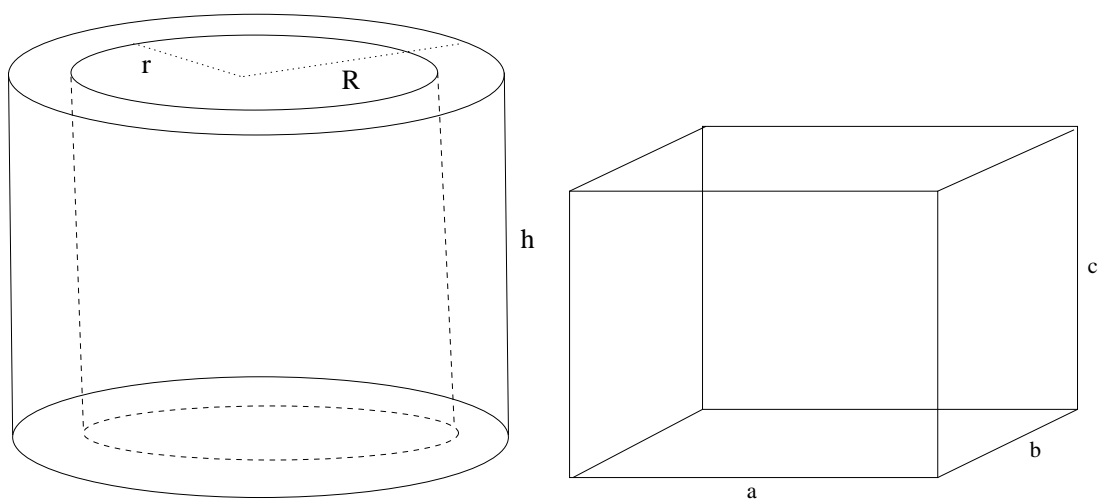


Figura 2.3: Diagramas de los volúmenes a calcular

1. Dibuje los puntos experimentales representando  $Z^2$  frente a  $\nu^2$ .
2. Obtenga la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de mejor ajuste. Obténganse también sus respectivos errores.
3. Incluya la recta de mejor ajuste en la gráfica con los puntos experimentales.
4. A partir de los resultados del apartado segundo calcule el valor de la inductancia  $L$  y su error, expresándolos de forma adecuada.
5. A partir de los resultados del apartado segundo calcule el valor de la

$\nu$ (Hz)	12,3	15,8	19,4	20,0	22,9	24,5	26,9	29,2	29,6
$Z$ ( $\Omega$ )	7,4	8,4	9,1	9,6	10,3	10,5	11,4	11,9	12,2

Cuadro 2.7:

resistencia y su error, expresándolos de forma adecuada.

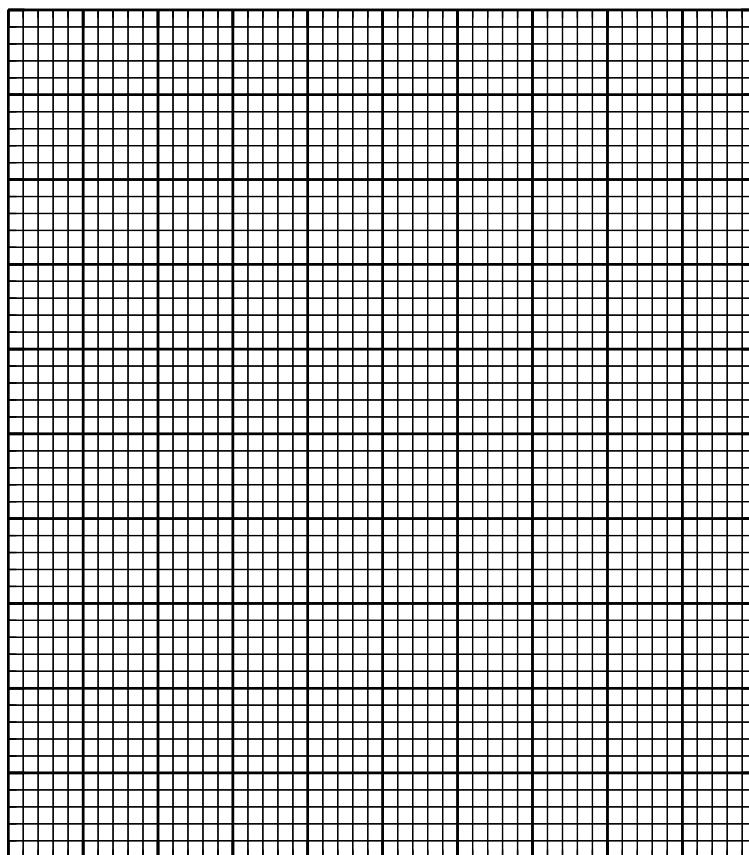


Figura 2.4: Cuestión 4: Representación del cuadrado de la impedancia frente al cuadrado de la frecuencia.

## Notas

---

## Notas

---

## Capítulo 3

# Calorimetría: Cálculo del equivalente en agua de un calorímetro y del calor específico de un líquido

El objetivo de esta práctica es la familiarización del alumno con algunas leyes básicas de la termodinámica, con el concepto de equivalente en agua de un calorímetro y el cálculo del calor específico de una sustancia problema.

### 3.1. Fundamento teórico

Supongamos que se transfiere una pequeña cantidad de calor  $\delta Q$  entre un sistema de masa  $m$  y su entorno. Si esa transferencia de calor hace que el sistema experimente una variación de temperatura  $dT$ , se define el **calor específico** (también llamado **capacidad calorífica específica**) del sistema,  $c$ , como

$$c = \frac{1}{m} \frac{\delta Q}{dT} \quad . \quad (3.1)$$

Por tanto la cantidad de calor necesaria para aumentar en  $dT$  la temperatura de una masa  $m$  de nuestro sistema es

$$\delta Q = m c dT \quad . \quad (3.2)$$

Las unidades más usuales empleadas en el cálculo de calores específicos son  $J/gK$  y  $cal/gK$ . Para pasar de una a la otra basta recordar que  $1 cal = 4,18 J$ . También se usa frecuentemente el **calor específico molar** (o **capacidad calorífica molar**)  $C = M c$ , donde  $M$  es el peso molecular de la sustancia que estemos estudiando.

Si el calor específico de una sustancia es constante en el intervalo comprendido entre las temperaturas  $T_1$  y  $T_2$  entonces se deduce de la fórmula

(3.2) que la cantidad de calor necesaria para llevar un cuerpo de masa  $m$  de la temperatura  $T_1$  a la temperatura  $T_2$  es

$$Q = m \int_{T_1}^{T_2} c dT = mc(T_2 - T_1) \quad . \quad (3.3)$$

Si  $T_2$  es menor que  $T_1$ ,  $Q$  es negativo indicando que el sistema libera calor para de este modo disminuir su temperatura<sup>1</sup>.

La realización de medidas precisas de **calores específicos** resulta difícil desde un punto de vista experimental pues es casi imposible evitar transferencias de calor no deseadas entre la muestra y su entorno.

Las experiencias calorimétricas se llevan a cabo en **calorímetros**. Estos interfieren con su propia capacidad calorífica en el experimento, por lo que ha de tenerse en cuenta su comportamiento térmico a la hora de realizar los cálculos.

Se define el **equivalente en agua de un calorímetro**,  $A$ , como la masa de  $A$  gramos de agua que absorbería (o cedería) la misma cantidad de calor que el calorímetro para una misma variación de temperatura.

El cálculo del equivalente en agua de un calorímetro es lo mismo que conocer su capacidad calorífica, que tendrá que tenerse en cuenta cuando tratemos de usar el calorímetro para determinar el calor específico de alguna sustancia.

Las medidas en los calorímetros se llevarán a cabo suministrando energía a través del calor que se disipa en una resistencia por efecto Joule al líquido que se encuentre en su interior. La energía que se suministra por una corriente eléctrica de intensidad  $I$ , a una resistencia  $R$  (con una diferencia de potencial  $V$  en sus extremos) durante un tiempo  $t$

$$E = I^2 R t = V I t \quad . \quad (3.4)$$

Si esta energía se suministra directamente, en forma de calor, a una masa  $m$  de una sustancia de calor específico  $c$  que se encuentra a una temperatura  $T$  en el interior del calorímetro, la temperatura se elevará hasta  $T'$  cumpliéndose

$$I^2 R t = V I t = mc(T' - T) \quad . \quad (3.5)$$

### 3.1.1. Cálculo del equivalente en agua del calorímetro

Para el cálculo del **equivalente en agua** la sustancia que usamos es agua, con calor específico  $c_a = 1 \text{ cal/g K}$ . En este caso si añadimos una masa  $m_0$  de agua al calorímetro y reescribimos la ecuación (3.5) teniendo en cuenta la influencia del calorímetro, llamando  $T_0$  a la temperatura inicial y  $T$  a la temperatura tras un tiempo  $t$ , obtenemos

$$V I t = (m_0 + A)c_a(T - T_0) \quad , \quad (3.6)$$

---

<sup>1</sup>Este criterio de signos es el llamado *criterio físico*, contrario al *criterio químico*.

donde despejando  $T$  nos queda

$$T = T_0 + \frac{VI}{(m_0 + A)c_a} t \quad . \quad (3.7)$$

La dependencia de la temperatura  $T$  frente a tiempo  $t$  es lineal, luego si medimos la temperatura en diferentes intervalos de tiempo podemos obtener con los datos experimentales la recta de mejor ajuste, y del valor de la pendiente  $a = \frac{VI}{(m_0 + A)c_a}$  de la misma obtener el equivalente en agua del calorímetro  $A$ .

### 3.1.2. Cálculo del calor específico de una sustancia problema

Si queremos medir el calor específico  $c_p$  de una sustancia problema podemos escribir la ecuación (3.5), teniendo en cuenta el equivalente en agua  $A$ , como

$$VI t = (m_p c_p + A c_a)(T - T_0) \quad , \quad (3.8)$$

donde  $m_p$  es la masa de sustancia problema en el calorímetro. De nuevo la dependencia de  $T$  frente al tiempo  $t$  es lineal y, con los resultados de la recta de regresión, puede calcularse la capacidad  $c_p$ .

## 3.2. Objetivos

Los objetivos de esta práctica son la familiarización con las principales leyes de la calorimetría y con el concepto de calor específico de una sustancia. Asimismo se introduce el concepto de equivalente en agua y la forma de medirlo así como la medida del calor específico de una sustancia.

## 3.3. Material empleado

- calorímetro con resistencia calefactora
- termómetro
- polímetro
- fuente de alimentación
- cronómetro
- probeta
- balanza



## 3.4. Realización

### 3.4.1. Equivalente en agua

1. Pesar el calorímetro vacío (masa =  $m_0$ )
2. Añadir unos 200 cc de agua al calorímetro y pesar de nuevo, obteniendo la masa de agua añadida como la diferencia entre esta pesada y la anterior. También puede llevarse a cabo esta medida directamente haciendo que el cero de la balanza corresponda a  $m_0$ .
3. Medir con el polímetro el valor de la resistencia calefactora<sup>2</sup>:  $R$ .  
**Atención:** No conectar la resistencia  $R$  sin que esté sumergida pues se quemaría.
4. Colocar el termómetro en el calorímetro, cerrándolo, y medir la temperatura inicial del agua  $T_0$ .
5. Ajustar la fuente de alimentación a la tensión de trabajo (entre 9 y 12 V) y poner en marcha el cronómetro simultáneamente al encendido de la fuente.
6. Tomar medidas aproximadamente cada dos minutos de la temperatura del agua, rellenando la tabla 3.1. Tomar como mínimo unas siete u ocho medidas. Es conveniente agitar **suavemente** el calorímetro para tratar de homogeneizar la temperatura del líquido en su interior.

### 3.4.2. Calor específico sustancia problema

1. Añadir un volumen de sustancia problema similar al de agua añadido para calcular el equivalente en agua en el paso anterior y pesar obteniendo la masa añadida.
2. Colocar el termómetro en el calorímetro, cerrándolo, y medir la temperatura inicial de la sustancia problema:  $T_0$ .
3. Ajustar la fuente de alimentación a la tensión de trabajo (entre 9 y 12 V) y poner en marcha el cronómetro simultáneamente al encendido de la fuente.
4. Tomar medidas como en el caso anterior, agitando el calorímetro y rellenando la tabla 3.2.

---

<sup>2</sup>Este valor puede utilizarse para el cálculo de la potencia disipada por efecto Joule de acuerdo con la fórmula (3.5), aunque es preferible utilizar el producto  $VI$ , mediendo  $I$  con el polímetro.

### 3.5. Resultados y discusión

Presentar con su incertidumbre asociada todas las medidas que se hayan llevado a cabo.

Representar gráficamente la variación de la temperatura en el interior de calorímetro con el tiempo, para los dos casos medidos. Siguiendo las instrucciones reseñadas en el fundamento teórico de esta práctica, calcular las rectas de regresión en ambos casos e incluirlas adecuadamente en los gráficos.

A partir del resultado obtenido en el ajuste de mínimos cuadrados de los datos experimentales en el primer caso, calcular el equivalente en agua del calorímetro, con su incertidumbre asociada.

Utilizando el resultado anterior para el equivalente en agua del calorímetro y el ajuste al segundo conjunto de datos experimentales (Tabla 3.2) calcular el calor específico de la sustancia problema y su incertidumbre. Discute razonadamente los resultados obtenidos.

### 3.6. Cuestiones propuestas

#### Cuestión 1

Si varios cuerpos con diferente capacidad calorífica específica pero la misma masa se colocan junto a un foco calorífico, ¿cuál de ellos se calentará antes hasta una temperatura determinada?

#### Cuestión 2

¿Qué resulta más conveniente para mantener constante la temperatura de una recinto, rodearlo de agua o de aire? Razona la respuesta.

#### Cuestión 3

Da cuatro ejemplos diferentes de conversión de energía en calor.

#### Cuestión 4

La densidad del agua varía levemente con la temperatura. Si nos encontráramos a una temperatura de  $47.5\text{ }^{\circ}\text{C}$  ¿Cuál sería la densidad del agua a dicha temperatura? Datos:  $\rho(46,0^{\circ}\text{C})0,9989\text{ g/cc}$  y  $\rho(48,0^{\circ}\text{C})0,9890\text{ g/cc}$ .

## Notas

---

## Notas

---

Equivalente en agua del calorímetro	
Tiempo	Temperatura

Cuadro 3.1:

Calor específico sustancia problema	
Tiempo	Temperatura

Cuadro 3.2:

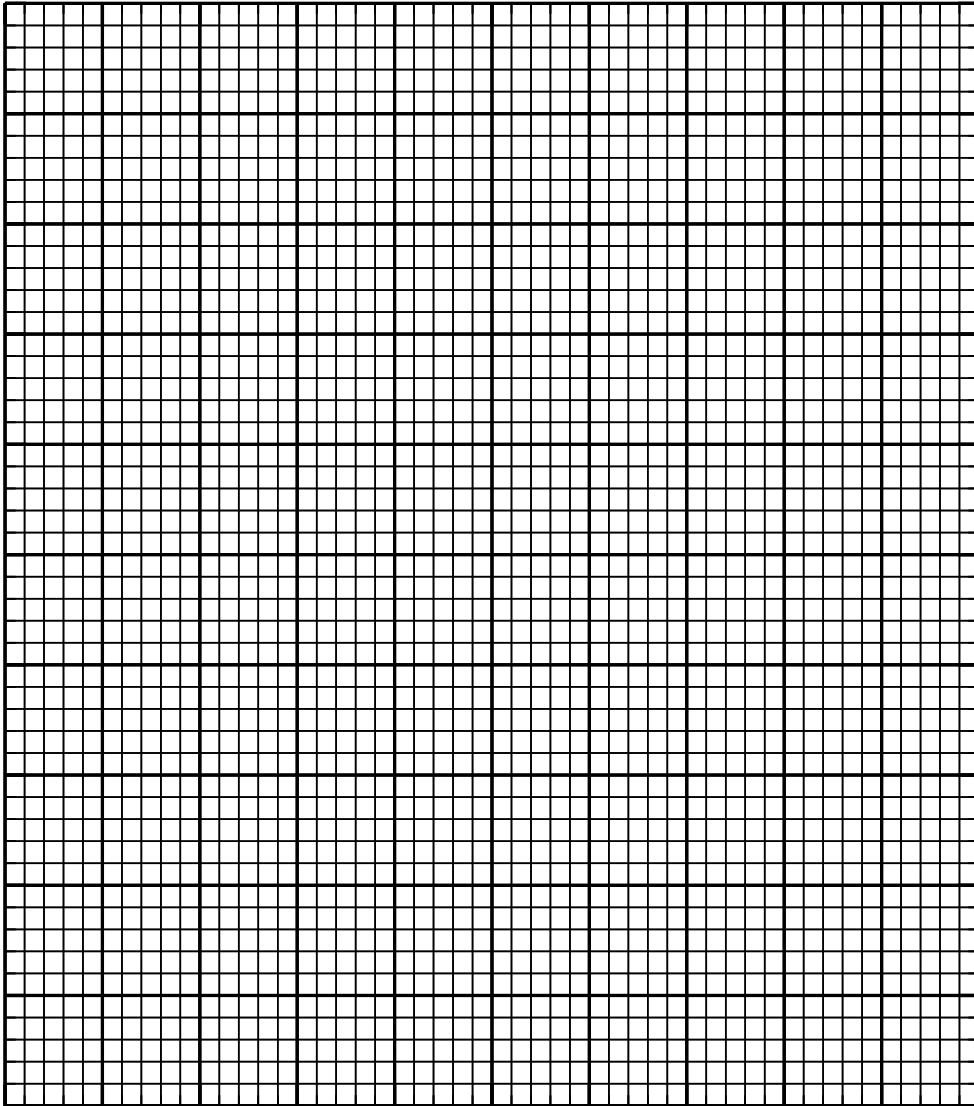


Figura 3.1: Temperatura en función del tiempo para el cálculo del equivalente en agua del calorímetro

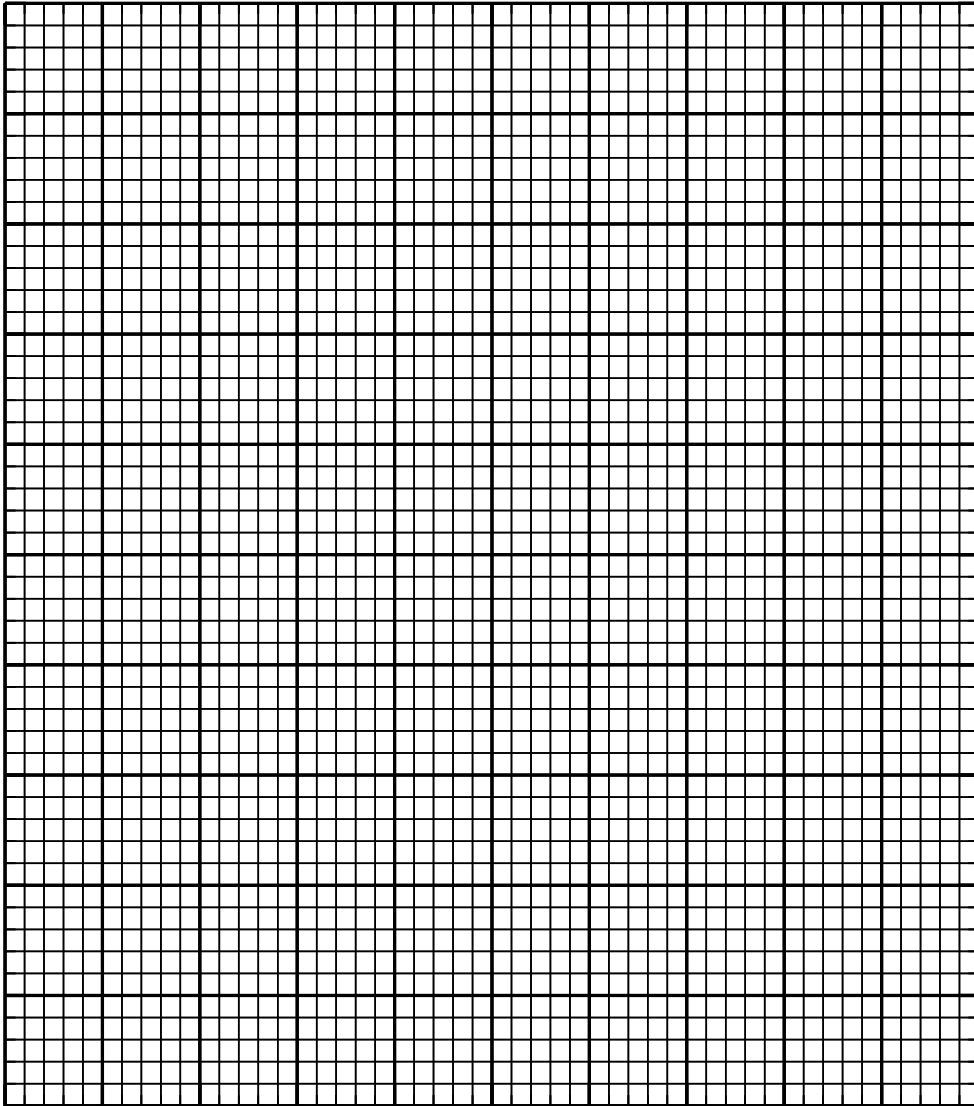


Figura 3.2: Temperatura en función del tiempo para el cálculo del equivalente en agua del líquido problema

## Capítulo 4

# Experiencia con resortes: comprobación de la ley de Hooke

### 4.1. Fundamento teórico

El objetivo de esta práctica consiste en la verificación de la ley de Hooke y el estudio dinámico de un resorte.

Si se cuelga una masa  $m$  del extremo inferior de un resorte metálico helicoidal, éste se alarga hasta que alcanza una nueva posición de equilibrio y el resorte somete a la masa a una fuerza llamada *fuerza recuperadora*. La *ley de Hooke* establece que la fuerza recuperadora es proporcional al *desplazamiento*, esto es, al alargamiento o elongación que experimenta el resorte respecto a la posición de equilibrio. Esto se cumple para deformaciones pequeñas, siempre que no se sobrepase el límite de elasticidad o límite elástico del resorte.

Por tanto, si  $F$  es la fuerza aplicada al resorte y  $x$  es el desplazamiento, la relación entre ambas cantidades se puede expresar como:

$$F = k x \quad , \quad (4.1)$$

donde  $k$  es la llamada *constante elástica del resorte* o *constante del resorte*, con dimensiones de fuerza por unidad de longitud. La fuerza recuperadora de un resorte cuando se estira una distancia  $x$  tendrá el mismo módulo que la fuerza en la ecuación (4.1), pero con sentido opuesto, lo que indica que la fuerza se opone al desplazamiento  $x$ .

Al colgar de un resorte pesas de masa creciente, el peso será igual a la fuerza recuperadora cuando el sistema alcance un estado de equilibrio. Si se miden los desplazamientos para diferentes masas se puede representar una gráfica  $F$ - $x$ , cuyo resultado es una recta con pendiente igual a  $k$ .



Si se aplica momentáneamente una fuerza adicional a una masa que cuelga en equilibrio de un muelle (por ejemplo, tirando hacia abajo con la mano de la masa) la masa unida al muelle oscilará alrededor de su posición de equilibrio. Este movimiento se realiza bajo la acción de una fuerza neta proporcional al desplazamiento  $x$  medido respecto a la posición de equilibrio inicial de la masa  $m$ . Por tanto, el movimiento realizado será un *movimiento armónico simple* (M.A.S.) para el que se demuestra que el período es igual a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} . \quad (4.2)$$

Debido a que el resorte también oscila junto a la masa  $m$ , la ecuación anterior será correcta en el caso ideal que la masa del mismo fuese nula o despreciable. Si esto no fuera así, habrá que tenerla en cuenta. Se demuestra que, para un resorte uniforme de masa  $m'$ , la ecuación (4.2) se debe sustituir por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{1}{3}m'}{k}} . \quad (4.3)$$

Por tanto, si representamos el período al cuadrado  $T^2$  frente a la masa  $m$  se obtiene una línea recta cuya pendiente y ordenada en el origen estarán relacionadas con  $k$  y  $m'$  respectivamente.

A partir del período se puede definir la *frecuencia* como el número de ciclos por segundo -o hercios (Hz)-, y se expresa como  $f = 1/T^1$ . De esta forma, según las ecuaciones (4.2) y (4.3), si la masa aumenta, el muelle oscila más lentamente; y si el resorte se hace más rígido de manera que  $k$  aumente, el muelle oscila más rápidamente. Se puede advertir también que la amplitud de oscilación en un movimiento armónico simple no influye para nada en la frecuencia de oscilación y, por tanto, en el período.

## 4.2. Objetivos

Los objetivos de la presente práctica son:

- Medida de la constante elástica de un muelle mediante un procedimiento estático.
- Medida de la constante elástica del mismo muelle por medio de un análisis dinámico del resorte. Comprobar que el movimiento resultante de apartar de la posición de equilibrio y soltar un peso colgado del muelle es un movimiento armónico simple.
- Comparación de las constantes elásticas y sus correspondientes incertidumbres obtenidas de las dos formas citadas anteriormente.

---

<sup>1</sup>Otra notación común para la frecuencia es  $\nu = 1/T$ .

### 4.3. Material empleado

- Soporte de trípode, nueces dobles y varilla soporte.
- Pinzas de bureta.
- Muelle.
- Portapesas y juego de pesas.
- Índice.
- Regla milimetrada.
- Cronómetro.
- Célula fotoeléctrica.

### 4.4. Realización

1. Cuelgue sucesivamente pesas del extremo libre del resorte y anote las elongaciones correspondientes respecto a la posición de equilibrio. Esto habrá de repetirse hasta tener un mínimo de **siete** puntos experimentales, procurando que estos cubran un rango relevante de valores del desplazamiento  $x$ .
2. Representétese gráficamente el peso frente a las correspondientes elongaciones. Obténgase mediante un ajuste de mínimos cuadrados el valor de la constante elástica del muelle y añádase la recta de mejor ajuste a la gráfica con los puntos experimentales.
3. Cuelgue una pesa del extremo inferior del resorte. La masa de esta pesa ha de ser lo suficientemente grande para que el desplazamiento que sufra el muelle permita que este oscile alrededor de la posición de equilibrio alcanzada. A continuación tire suavemente de la pesa hacia abajo, procurando que el resorte no oscile hacia los lados, y suéltela después. Deje que el sistema oscile varias veces hasta que se estabilice el movimiento y, con ayuda del cronómetro y el contador de la célula fotoeléctrica, tome el tiempo que transcurre para un número de oscilaciones determinadas, por ejemplo, unas veinte o veinticinco, teniendo en cuenta que cada oscilación implica dos impulsos en el contador utilizado. Repita el proceso tres para una misma masa.
4. Repita la operación utilizando masas iniciales diferentes hasta obtener de nuevo **siete** puntos experimentales  $m - T$ .

5. Tras hallar el valor medio del periodo para cada masa, represente en una gráfica  $T^2$  frente a  $m$ . Obténgase a partir de la recta de mejor ajuste a los datos experimentales el valor de  $k$  y de  $m'$  y represéntese la recta de mejor ajuste junto a los datos experimentales.

## 4.5. Resultados y discusión

El alumno realizará un análisis de los resultados obtenidos, indicando las cantidades medidas y sus errores, teniendo en cuenta la precisión de los instrumentos utilizados así como las leyes experimentales obtenidas.

Se deben realizar dos gráficas (ver figuras 4.1 y 4.2) para representar los datos experimentales, una por cada procedimiento seguido, y obtener mediante los resultados del ajuste de mínimos cuadrados la constante elástica del muelle así como su incertidumbre en ambos casos. Se representará también la recta de mejor ajuste junto a los puntos experimentales obtenidos.

Por último el alumno comparará el valor de  $k$  y su incertidumbre asociada que se obtiene con cada método.

## 4.6. Cuestiones propuestas

### Cuestión 1

¿Cuál de los dos procedimientos seguidos para medir la constante del resorte  $k$  parece más preciso? ¿Por qué?

### Cuestión 2

A partir de ley de Hooke que se acaba de comprobar, obténgase la expresión de la energía potencial almacenada en el resorte para un alargamiento dado.

### Cuestión 3

En el instante que la fuerza deformadora externa cesa, ¿cesa también la fuerza elástica recuperadora? Explique lo que ocurre a partir de ese instante.

### Cuestión 4

Si colgamos un cuerpo con una masa determinada en un resorte con cierta constante elástica y lo dejamos oscilar: ¿Cómo depende el período de oscilación del desplazamiento inicial del cuerpo respecto de la posición de equilibrio?

### Cuestión 5

En el mismo montaje que para la pregunta anterior, conforme la masa del cuerpo que oscila es mayor: ¿La frecuencia de oscilación se hace mayor o menor? Razone la respuesta.

## Notas

---

## Notas

---

Cálculo de la constante de un resorte	
Fuerza	Desplazamiento

Cuadro 4.1:

Cálculo de la constante de un resorte					
Masa	$NT$	$NT$	$NT$	$T$	$T^2$

Cuadro 4.2:

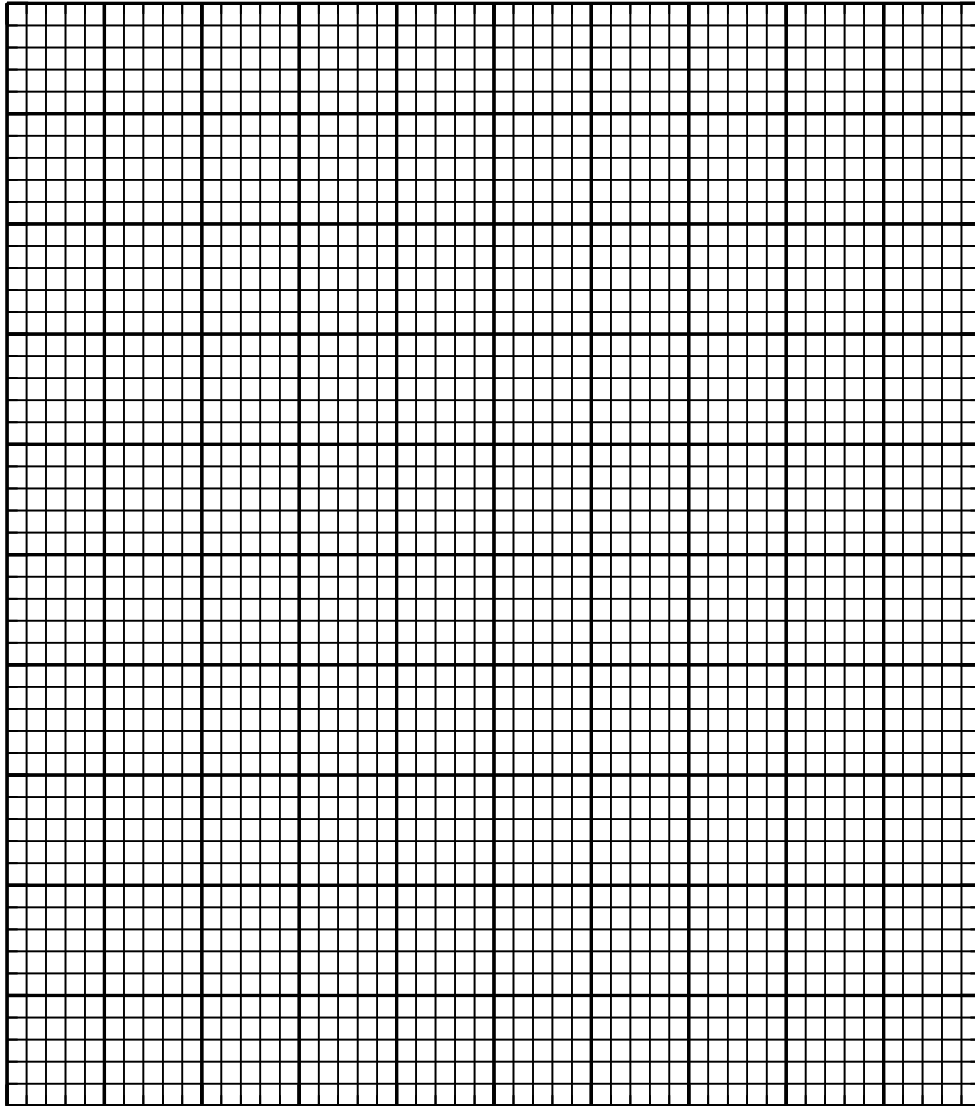


Figura 4.1: Cálculo de la constante de fuerza de un resorte: Fuerza frente a desplazamiento.

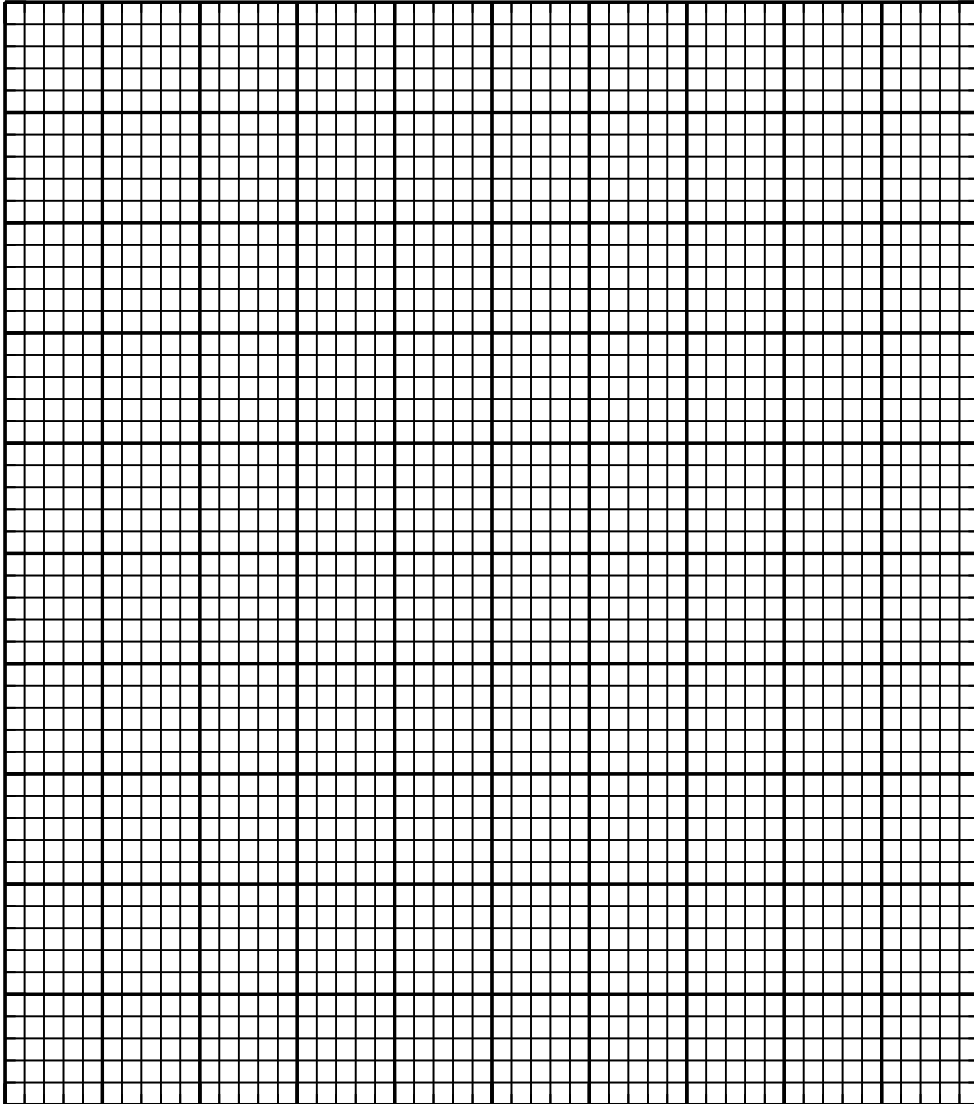


Figura 4.2: Cálculo de la constante de fuerza de un resorte: Periodo al cuadrado frente a masa.



## Capítulo 5

# Velocidad límite: viscosidad de un líquido

La presente práctica se ocupa del estudio de las fuerzas de fricción que oponen los fluidos al desplazamiento de un cuerpo en su seno. Introduciremos el concepto de velocidad límite y el de viscosidad y calcularemos el **coeficiente de viscosidad** de uno o varios líquidos.

### 5.1. Introducción

Cuando un sólido se mueve inmerso en un fluido desplaza las moléculas del fluido, “haciéndolas a un lado”, transfiriéndoles una cantidad de movimiento que, obviamente, depende de la propia cantidad de movimiento del sólido; es decir, de su **velocidad**. A su vez, las moléculas del fluido que han adquirido mayor momento se desplazan contra la oposición de las moléculas vecinas, transfiriéndoles también momento. Como resultado de este proceso, el fluido opone una *fuerza de fricción* o *fuerza de arrastre* al movimiento del cuerpo sólido en su interior que es del mismo tipo que las fuerzas entre capas de un fluido que se desplazan a diferente velocidad. Cuanto mayor sea la velocidad del cuerpo, mayor será la transferencia media de momento en la colisión con las moléculas del fluido y, en consecuencia, más perturbaremos el equilibrio entre diferentes capas del fluido.

### 5.2. Fundamento teórico

Como vimos en la introducción todo cuerpo en movimiento en el seno de un fluido experimenta una *fuerza de fricción*, también llamada **fuerza viscosa**, que debe ser proporcional a su velocidad y opuesta a ella

$$\vec{F}_v = -K\eta \frac{d\vec{r}}{dt} \quad , \quad (5.1)$$

donde el signo expresa la oposición al movimiento de la fuerza de fricción, y los coeficientes  $K$  y  $\eta$  son, respectivamente, el **coeficiente de arrastre** y el **coeficiente de viscosidad**. El primero de ellos es de carácter puramente geométrico y solamente depende de la forma y el tamaño del cuerpo que se desplaza en el seno del fluido. Su obtención teórica, a partir de una descripción microscópica del fenómeno que acabamos de describir es imposible en la práctica, excepto para geometrías muy sencillas. En general se recurre a la determinación empírica de dicho coeficiente. En el caso de una esfera de radio  $R$  que se mueve lentamente, un cálculo laborioso permite demostrar que

$$K = 6\pi R , \quad (5.2)$$

relación que se conoce como *Ley de Stokes*. El **coeficiente de viscosidad**,  $\eta$ , depende de las propiedades moleculares del fluido, y su determinación empírica es el cometido de la presente práctica.

Como puede deducirse del análisis dimensional de las ecuaciones (5.1) y (5.2) las dimensiones del coeficiente de viscosidad son fuerza dividida entre longitud por velocidad, por tanto, en el Sistema Internacional se mide en unidades

$$1 \text{ N m}^{-1} (\text{m/s})^{-1} = 1 \text{ N s m}^{-2} = 1 \text{ Pa s} \quad . \quad (5.3)$$

La unidad correspondiente en sistema *cgs*,  $1 \text{ din s cm}^{-2}$ , es la unidad de viscosidad de uso corriente y recibe el nombre de *poise* cumpliéndose que

$$1 \text{ poise} = 1 \text{ din s cm}^{-2} = 10^{-1} \text{ N s m}^{-2} \quad . \quad (5.4)$$

### 5.2.1. Velocidad límite en caída libre

Consideremos como sistema objeto de estudio un cuerpo esférico, de radio  $R$ , en caída libre en el seno de un fluido. La trayectoria del móvil estará confinada en una única dirección, pudiendo entonces escribirse la ecuación de movimiento de dicho móvil en una dimensión como:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg - E - K\eta \frac{dz}{dt} ; \quad (5.5)$$

donde el eje  $z$  es paralelo a la dirección del movimiento y a la aceleración de la gravedad, siendo el sentido de esta aceleración el de  $z$  creciente. La fuerza  $E$  es el empuje debido al **Principio de Arquímedes**, que ya estudiamos en la práctica II. Sin más que imponer la condición de anulación de la aceleración total resultante,  $\frac{d^2 z}{dt^2}$  en la ecuación (5.5), se obtiene que un móvil, en caída libre, no puede ser acelerado más allá de cierta velocidad, que llamamos **velocidad límite** ( $v_l$ ),

$$v_l = \frac{dz}{dt} = \frac{mg - E}{K\eta} . \quad (5.6)$$

Si ahora aplicamos la relación de Stokes y el principio de Arquímedes a la ecuación (5.6), teniendo en cuenta la geometría esférica del móvil, obtendremos el siguiente resultado para la velocidad límite:

$$v_l = \frac{2 (\rho - \rho_f) R^2 g}{9\eta} , \quad (5.7)$$

donde  $\rho$  y  $\rho_f$  representan la densidad del móvil y del fluido respectivamente. A partir de dicho resultado se puede determinar empíricamente el valor del coeficiente de viscosidad supuesto el conocimiento de la densidad y el radio del móvil y la densidad del fluido.

### 5.2.2. Trayectoria de la caída libre

La ecuación de movimiento de la trayectoria para un móvil en caída libre, ecuación (5.5), es una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea. No obstante, puede resolverse con relativa facilidad: resolviendo primero la ecuación diferencial de primer orden para la velocidad. Para el caso presentado en el apartado anterior resulta que la velocidad es

$$\frac{dz}{dt} = v_l \left[ 1 - \left( 1 - \frac{v_0}{v_l} \right) e^{-\frac{9\eta}{2R^2\rho} t} \right] , \quad (5.8)$$

donde  $v_0$  es la velocidad inicial del móvil. Integrando la ecuación (5.8) se obtiene que la trayectoria del móvil en el seno del fluido es

$$z - z_0 = v_l t + Z_t e^{-\frac{9\eta}{2R^2\rho} t} , \quad (5.9)$$

siendo para el caso de la caída libre  $Z_t = \left( \frac{2R^2}{9\eta} \right)^2 \rho(\rho - \rho_f)g$ .

Esta última ecuación describe la trayectoria de caída libre de un móvil esférico de radio  $R$  y densidad  $\rho$  en el seno de un fluido de densidad  $\rho_f$  y coeficiente de viscosidad  $\eta$ .

### 5.3. Objetivos

A partir de los resultados (5.8,5.9) de la sección anterior es fácil ver que, si dejamos pasar un tiempo suficientemente grande ( $t \gg 2R^2\rho/(9\eta)$ ), el móvil describe aproximadamente un *movimiento uniforme de velocidad constante*  $v_l$ . Además dicha velocidad  $v_l$  es independiente de la velocidad inicial con la que inició la caída libre.

Los objetivos de la presente práctica son:

- Estudiar la trayectoria de un cuerpo esférico en caída libre en el seno de un líquido problema muy viscoso.
- Determinar si se alcanza o no el régimen estacionario de velocidad, en el que la velocidad se puede considerar constante e igual a la velocidad límite calculada en la sección anterior.
- De alcanzarse dicho régimen, obtener la velocidad límite y a partir de la medida directa de las densidades del fluido y del móvil y del radio de este último, calcular una estimación indirecta de la viscosidad del fluido con su correspondiente error.

## 5.4. Material empleado

En esta práctica se dispone de los elementos siguientes:

- Diez esferitas de plástico “*idénticas*” que usaremos como móviles.
- Una probeta de sección mucho mayor que el radio del móvil esférico.
- Dos líquidos problema de viscosidad desconocida.
- Un cronómetro.
- Un picnómetro, una balanza y un calibre.

## 5.5. Realización

Para la realización de esta práctica es necesario llevar a cabo las siguientes tareas:

1. Determinar el diámetro de las esferas usadas como móviles a partir de la medida con el calibre del diámetro de unas 10 esferas. Hallar su densidad media, empleando el picnómetro, mediante el procedimiento descrito en la práctica II y aplicando la fórmula:

$$\rho = \frac{m_s}{m_s + m_1 - m_2} \rho_{\text{patr}} ; \quad (5.10)$$

donde:  $m_s$  = masa del sólido seco en el aire,  $m_1$  = masa del picnómetro lleno de agua (líquido patrón) y  $m_2$  = masa del picnómetro lleno de agua con el sólido en su interior.

2. Determinar, usando el picnómetro de nuevo, la densidad de los líquidos problema, usando la fórmula:

$$\rho = \frac{m_2 - m_0}{m_1 - m_0} \rho_{\text{patr}} ; \quad (5.11)$$

donde:  $m_0$  = masa del picnómetro vacío,  $m_1$  = masa del picnómetro lleno de agua (patrón) y  $m_2$  = masa del picnómetro lleno de líquido problema. En la tabla 5.1 se encuentra la densidad del agua para diferentes temperaturas, necesaria en las ecuaciones (5.10) y (5.11).

3. Sujetando con las pinzas una “esferita”, sumergirla en el líquido problema y liberarla entonces para que inicie el movimiento de caída libre. Conforme el móvil cae, tomar **siete** tiempos a **siete** alturas diferentes. Para ello tomar como referencia puntos en la graduación de la probeta.
4. Repetir **cinco** veces la medida de tiempos para la caída de una esfera, tomando siempre tiempos para las mismas siete alturas y rellenar con los datos obtenidos la tabla 5.2.
5. **IMPORTANTE:** Emplee como densidad del aceite el valor  $\rho = 0,88034 \pm 0,00016$  g/cc.

## 5.6. Resultados y discusión

El alumno realizará una tabla con los valores de posición y tiempo obtenidos en el experimento. Los valores de dicha tabla se utilizarán para calcular la media de los tiempos para cada cada uno de los puntos de referencia. Una vez calculadas estas medias se representará directamente posición frente a tiempo en un sistema de ejes coordenados. Dicha representación permitirá determinar para el líquido problema en qué región el móvil se halla en el régimen de velocidad constante.

Una vez determinados los puntos en los que el móvil se mueve con velocidad constante, el alumno realizará una **regresión lineal** ajustando una recta a estos puntos (caso de haber más de dos; de haber solo dos se determinará la pendiente a partir directamente de los puntos).

La **velocidad límite** se obtendrá como resultado de esta regresión lineal y, usando la ecuación (5.7), se deducirá el valor del coeficiente de viscosidad,  $\eta$ , y su error experimental. También se discutirán las posibles fuentes de error en el procedimiento descrito para la medición empírica del coeficiente de viscosidad.

## 5.7. Cuestiones propuestas

### Cuestión 1

Según lo aprendido en la presente práctica, ¿será diferente la velocidad de dos gotas de lluvia que caen desde nubes a diferente altura? ¿Por qué?

## **Cuestión 2**

A partir de la expresión de la velocidad límite en caída libre (5.7), ¿qué se corrige con un paracaídas para evitar una caída fatal?

## **Cuestión 3**

Resolvamos una “vieja” cuestión: si lanzamos desde suficiente altura dos esferas macizas de igual radio, la primera de hierro y la segunda de un material tres veces más denso: ¿cuál caerá antes y con mayor velocidad? ¿Y si las dos esferas en vez de idéntico radio tienen la misma masa?

## Notas

---

## Notas

---



T(°C)	$\rho(g/cm^3)$	T(°C)	$\rho(g/cm^3)$	T(°C)	$\rho(g/cm^3)$
0	0.9998	36	0.9937	72	0.9767
2	0.9999	38	0.9930	74	0.9755
4	1.0000	40	0.9922	76	0.9743
6	0.9999	42	0.9915	78	0.9731
8	0.9998	44	0.9907	80	0.9718
10	0.9997	46	0.9899	82	0.9706
12	0.9995	48	0.9890	84	0.9698
14	0.9993	50	0.9881	86	0.9680
16	0.9990	52	0.9872	88	0.9667
18	0.9986	54	0.9862	90	0.9653
20	0.9982	56	0.9853	92	0.9640
22	0.9978	58	0.9843	94	0.9626
24	0.9978	60	0.9832	96	0.9612
26	0.9968	62	0.9822	98	0.9584
28	0.9968	64	0.9811	100	0.9170
30	0.9956	66	0.9801	150	0.863
32	0.9951	68	0.9789	200	0.830
34	0.9944	70	0.9778	300	0.700

Cuadro 5.1: Densidad del agua en función de la temperatura.

Cálculo de la velocidad límite						
Espacio recorrido	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$\bar{t}$

Cuadro 5.2: Datos experimentales de la práctica para el cálculo de la viscosidad de un líquido

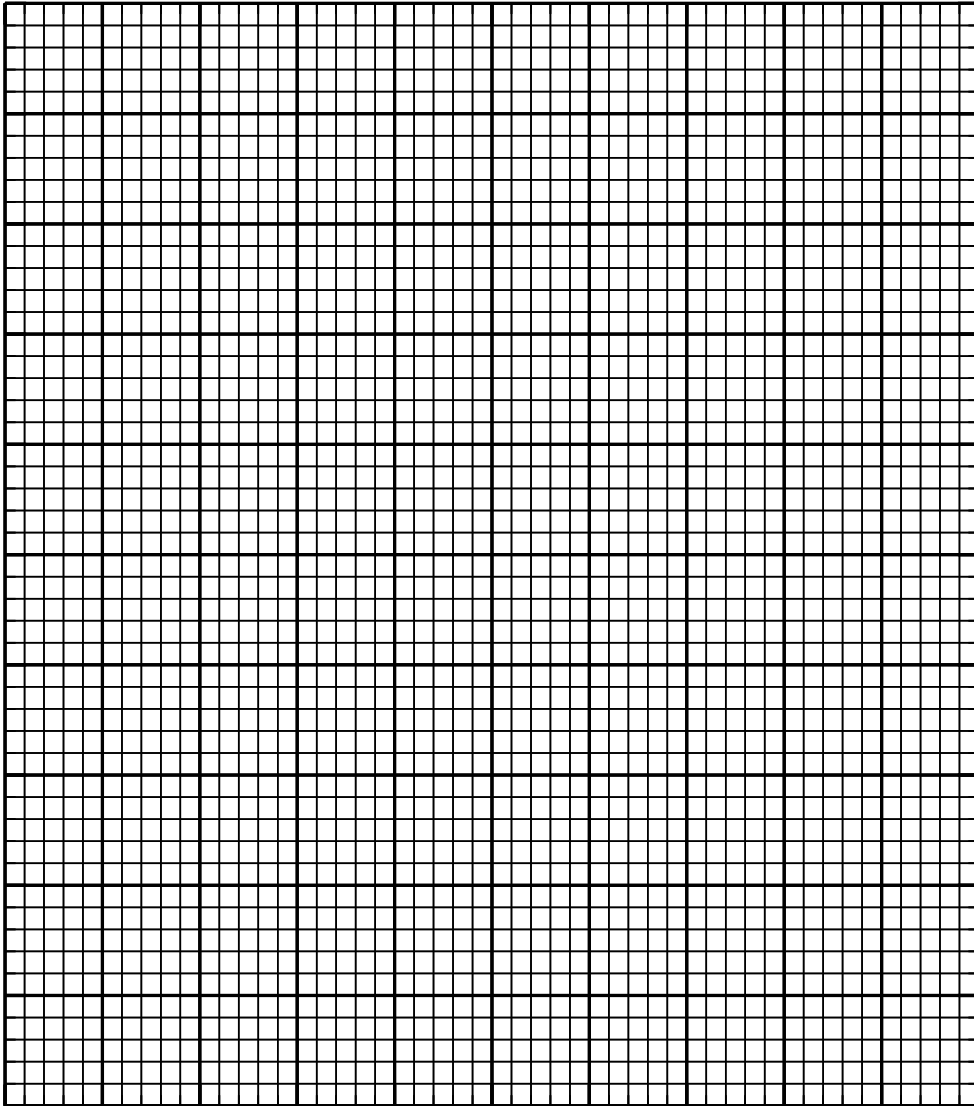


Figura 5.1: Cálculo de la velocidad límite de un fluido: desplazamiento frente a tiempo.

## Capítulo 6

# Teoría elemental de circuitos: comprobación de la ley de Ohm y de las leyes de Kirchoff

### 6.1. Fundamento e introducción

#### 6.1.1. Ley de Ohm

La relación entre la tensión, voltaje o diferencia de potencial ( $V$ ) aplicada a un conductor y la intensidad ( $I$ ) que circula por él, viene dada por:

$$V = RI, \quad (6.1)$$

donde  $R$  es la resistencia del conductor,  $V$  se expresa en voltios ( $V$ ),  $R$  en ohmios ( $\Omega$ ) e  $I$  en amperios ( $A$ ).

#### 6.1.2. Conexión de resistencias en serie

Un extremo de una de las resistencias se conecta a uno de la siguiente, el extremo libre de esta segunda se conecta a la tercera, y así sucesivamente, quedando libres un extremo de la primera y otro de la última, que serán los puntos de conexión a la fuente.

La intensidad que pasa por el conjunto de resistencias es la misma que la que circula por cada una de las resistencias, ya que es el único camino por el que pueden circular los electrones. La diferencia de potencial entre los extremos de cada resistencia dependerá de su valor, según la ley de Ohm. La suma de las diferencias de potencial es igual a la diferencia de potencial aplicada al circuito (ver figura 6.1.2).

$$I = I_1 = I_2 = I_3,$$
$$V_1 = R_1 \times I_1 = R_1 \times I,$$

$$\begin{aligned}
 V_2 &= R_2 \times I_2 = R_2 \times I, & (6.2) \\
 V_3 &= R_3 \times I_3 = R_3 \times I, \\
 V_1 + V_2 + V_3 &= V.
 \end{aligned}$$

La resistencia equivalente resulta ser la suma de las resistencias utilizadas. Su

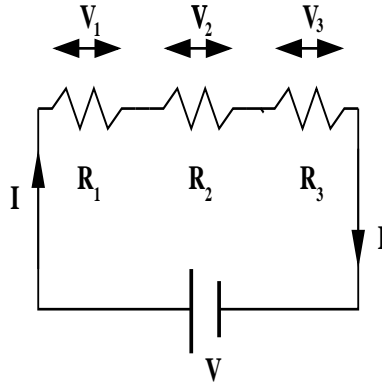


Figura 6.1: Montaje de resistencias en serie.

valor será siempre mayor que el de cualquiera de las resistencias individuales,

$$\begin{aligned}
 V &= R_{eq}I, \\
 V &= V_1 + V_2 + V_3 = I \times (R_1 + R_2 + R_3), & (6.3) \\
 R_{eq} &= R_1 + R_2 + R_3.
 \end{aligned}$$

### 6.1.3. Conexión de resistencias en paralelo

Uno de los extremos de cada una de las resistencias se conecta en un mismo punto, los extremos sobrantes se conectan en otro. Ambos puntos serán los que se conecten a la fuente.

La diferencia de potencial que se aplica al circuito es la misma que se aplica a cada una de las resistencias. La intensidad que circula por cada resistencia dependerá de su valor según la ley de Ohm. La suma de las intensidades individuales es igual a la intensidad que circula por el circuito, ya que los electrones que alcancen el conjunto circularán por una u otra resistencia repartiéndose por los diferentes caminos, reuniéndose después,

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 = V_2 = V_3 \\
 I_1 &= V/R_1; I_2 = V/R_2; I_3 = V/R_3, & (6.4) \\
 I &= I_1 + I_2 + I_3.
 \end{aligned}$$

La inversa de la resistencia equivalente resulta ser la suma de las inversas de las resistencias utilizadas. El valor de la resistencia equivalente será

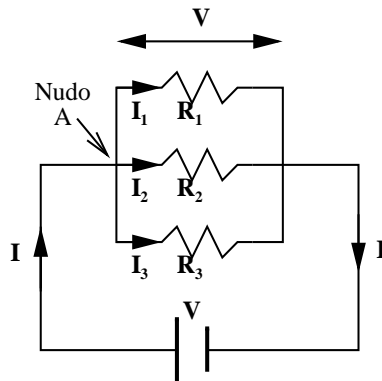


Figura 6.2: Montaje de resistencias en paralelo.

siempre menor que el de cualquiera de las resistencias individuales.

$$\begin{aligned}
 I &= V/R_{eq}, \\
 I &= I_1 + I_2 + I_3 = V \times (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3), \\
 1/R_{eq} &= 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3
 \end{aligned}
 \tag{6.5}$$

#### 6.1.4. Leyes de Kirchhoff

Siendo un NUDO el punto de unión de más de dos conductores, una RAMA el conductor entre dos nudos, y una MALLA un conjunto de ramas que formen un circuito cerrado. En un circuito formado por resistencias y generadores de corriente continua se tiene que:

**1ª Ley:** La suma de las caídas de potencial en una malla es cero. Ejemplo: (Conexión en Serie)  $V_1 + V_2 + V_3 - V = 0$ .

**2ª Ley:** La suma algebraica de las intensidades en un nudo es cero. Ejemplo: (Conexión en paralelo nudo A)  $I - I_1 - I_2 - I_3 = 0$ ; considerando positiva la intensidad que entra.

## 6.2. Objetivos

- Comprobar experimentalmente la ley de Ohm.
- Verificar experimentalmente las leyes de Kirchhoff mediante asociaciones de resistencias.
- Familiarizarse con el uso de una fuente de tensión, y con el manejo de un polímetro utilizado como voltímetro, amperímetro y ohmímetro.
- Medir resistencias experimentalmente a través de un ohmímetro y de la ley de Ohm, y teóricamente empleando el código de colores utilizado para indicar su valor.

### 6.3. Material empleado

- Cables.
- Panel de montaje.
- Tres resistencias.
- Polímetro.
- Fuente de tensión

### 6.4. Realización

- MEDIDA DE RESISTENCIAS

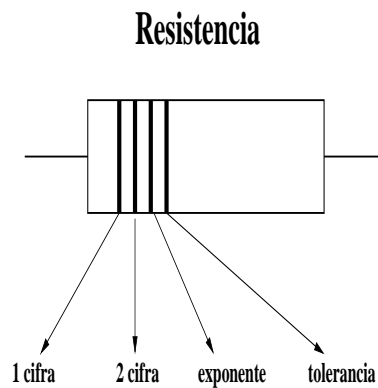


Figura 6.3: Esquema de colores de una resistencia.

El fabricante asegura que el valor de una resistencia está en el rango ( $R_{\text{máx}} - R_{\text{mín}}$ ), donde:

- $R_{\text{máx}} = R + R \times \frac{\text{tol}}{100} = R \times (1 + \frac{\text{tol}}{100})$
- $R_{\text{mín}} = R - R \times \frac{\text{tol}}{100} = R \times (1 - \frac{\text{tol}}{100})$
- $R$  sería el valor medio que se indica mediante un código de colores (ver figura y tabla).
- $R =$  Número formado por  $1^{\text{a}}$  y  $2^{\text{a}}$  cifras  $\times 10^X \Omega$ .
- $\text{tol}$  se denomina tolerancia, viene en % e indica el % de desviación posible respecto a  $R$ .

**Determinar el valor de las tres resistencias utilizadas mediante el código de colores y utilizando el ohmímetro; reflejarlo en la tabla siguiente.**

COLOR	1ª CIFRA	2ª CIFRA	$10^X$	TOLERANCIA
NEGRO	0	0	$10^0$	
MARRÓN	1	1	$10^1$	
ROJO	2	2	$10^2$	2 %
NARANJA	3	3	$10^3$	
AMARILLO	4	4	$10^4$	
VERDE	5	5	$10^5$	
AZUL	6	6	$10^6$	
VIOLETA	7	7	$10^7$	
GRIS	8	8	$10^8$	
BLANCO	9	9	$10^9$	
ORO			$10^{-1}$	5 %
PLATA			$10^{-1}$	10 %

Esquema de colores de una resistencia. (Nota: Si la tolerancia es del 20 % no se tiene una 4ª línea. Si la tolerancia es del 2 % (ROJO), la primera línea es la más cercana al borde).

$R_{COL}(\quad)$	TOL	$R_{OHM}(\quad)$

■ LEY DE OHM.

Conocido el valor de las tres resistencias anteriores, fije en la fuente un determinado voltaje, **12 V**, y compruebe que se verifica la ley de Ohm en los tres casos midiendo intensidad y voltaje.

$R \text{ (exp)} \pm \sigma$	$V \text{ (exp)} \pm \sigma$	$I \text{ (exp)} \pm \sigma$	$R \text{ (ley de Ohm)} \pm \sigma$

■ ASOCIACIÓN DE RESISTENCIAS EN SERIE (COMPROBACIÓN DE LA LEY DE OHM Y DE LA 1ª LEY DE KIRCHHOFF)

- Montar el circuito de la figura 1 o uno equivalente.
- No encender nada hasta que lo revise el profesor.
- Situar en la fuente una  $V_F \approx 16 \text{ V}$  y medir las magnitudes que se indican a continuación, usar para ello, el polímetro como voltímetro para medir los diferentes voltajes. Para medir la  $R_{eq}$  utilizar

el mismo polímetro como ohmímetro y conectar el conjunto de resistencias sólo al ohmímetro. Para medir las intensidades emplear el otro polímetro como amperímetro.

- Obtener los valores de las resistencias empleando la ley de Ohm. Indique los errores asociados ( $\sigma$ ) al error del aparato. Sean cuidadosos con las unidades, con las cifras significativas y con la coherencia de los resultados.

NOTAS: Respetar el nombre de las resistencias dado anteriormente; así a  $R_1$  le corresponderá  $V_1$ , a  $R_2$   $V_2$  y a  $R_3$   $V_3$ .

(a) Medidas con el voltímetro:

$$V_1 \pm \sigma = \quad V_2 \pm \sigma = \quad V_3 \pm \sigma = \quad V \pm \sigma =$$

(b) Medidas con el amperímetro:

$$I \pm \sigma =$$

(c) Medidas con el ohmímetro:

$$R_{eq} \pm \sigma =$$

(d) Empleo de la ley de Ohm:

$$R_{eq} = V/I =$$

(e) Calcule el error de la  $R_{eq}$  empleando que  $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$ .



■ ASOCIACIÓN DE RESISTENCIAS EN PARALELO (COMPROBACIÓN DE 2ª LEY DE KIRCHHOFF)

- Montar el circuito de la figura 2 o uno equivalente.
- No encender nada hasta que lo revise el profesor.
- Situar en la fuente una  $V_F \approx 8 \text{ V}$  y medir las magnitudes que se indican a continuación. Para medir la  $R_{eq}$  utilizar el mismo polímetro como ohmímetro y conectar el conjunto de resistencias sólo al ohmímetro. Para medir las intensidades ( $I_1, I_2, I_3$ ) emplear el mismo polímetro como amperímetro y para medir  $I$  usar el otro polímetro como amperímetro.
- Obtener los valores de las distintas magnitudes siendo cuidadosos con las unidades, con las cifras significativas y con la coherencia de los resultados. Indique los errores asociados ( $\sigma$ ), al error del aparato.

NOTAS: Respetar el nombre de las resistencias dado anteriormente; así a la anterior  $R_1$  le corresponderá  $I_1$ , a  $R_2$   $I_2$  y a  $R_3$   $I_3$ .

(a) Medidas con el amperímetro:

$$\begin{array}{ll} I_1 \pm \sigma = & I_2 \pm \sigma = \\ I_3 \pm \sigma = & I \pm \sigma = \end{array}$$

(b) Medidas con el ohmímetro:

$$R_{eq} \pm \sigma =$$

(c) Empleo de la ley de Ohm:

$$R_{eq} = (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3)^{-1} =$$

$$R_{eq} = V/I =$$

(d) Calcule el error asociado a  $R_{eq}$  empleando las fórmulas del apartado (c) mostrando en detalle los cálculos realizados.

## 6.5. Cuestiones propuestas

### Cuestión 1

En el laboratorio se le proporciona al alumno una resistencia con el siguiente código de colores: **rojo-rojo-rojo-oro**. Con el ohmímetro se mide para dicha resistencia un valor de  $2403\Omega$ . ¿Qué tiene que comentar al respecto?

### **Cuestión 2**

Se conecta una resistencia a una fuente de tensión, midiéndose que la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia es de  $16,13\pm 0,01$  V y que circula una intensidad a través suya de  $15,99\pm 0,01$  mA. Calcule el valor de la resistencia y su error absoluto. Escriba un número adecuado de cifras significativas y redondee adecuadamente.

## Notas

---

## Notas

---