# Examen de Análisis Numérico I
# Tercer Curso de I.T. Informática
# (Gestión y Sistemas)
## 12 de Diciembre de 2007

1. Dada la matriz $A = (a_{ij})$,donde $i, j = 1, 2, \cdots, n$ y $a_{ij} = \begin{cases} i(n-j+1) & \text{si} \quad i \leq j, \\ a_{ji} & \text{si} \quad i > j, \end{cases}$
y el vector de términos independientes $\mathbf{b} = (1, 2, \cdots, n)^T$. Considera el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para $n = 9$

   *a)* [**1.5 Puntos**] Estudiar la convergencia del método de Jacobi y de Gauss-Seidel, calculando sus radios espectrales.

   *b)* [**1.5 Puntos**] Realiza un gráfico de $w$ frente al número de iteraciones que se necesitan para obtener una aproximación a la solución del sistema utilizando el método SOR con criterio de paro $\|A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}\|_\infty < 10^{-3}$. Calcular también la solución aproximada para el $w_{\text{opt}}$ ($w$ óptimo).

2. Consideremos la función de Bessel definida por la integral

$$J_1(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha \operatorname{sen} t - t) dt$$

   *a)* [**1 Punto**] Realizar un dibujo de $J_1(\alpha)$ en el intervalo $[0, 10]$. Encontrar la única raíz $\alpha^*$ de $J_1(\alpha) - 0{,}5 = 0$ en el intervalo $[0, 2]$ utilizando el método de Newton con tolerancia tol $= 10^{-7}$ y condición inicial $\alpha_0 = 0$. Para hallar la derivada usar Richardson con la misma tolerancia.

   *b)* [**2 Puntos**] Hallar el polinomio $p_4(\alpha)$ que interpola 5 nodos igualmente espaciados de la función $J_1(\alpha)$ en el intervalo $[0, 10]$. Representar en una misma gráfica la función $J_1(\alpha)$, $p_4(\alpha)$, los 5 nodos y el spline cúbico sujeto $s(\alpha)$ tomando los mismos 5 nodos igualmente espaciados en el intervalo $[0, 10]$. Para calcular $s'(0) = J_1'(0)$, $s'(10) = J_1'(10)$ utilizar Richardson con tolerancia tol $= 10^{-5}$. Mostrar los valores $J_1(\alpha^*)$, $p_4(\alpha^*)$ y $s(\alpha^*)$.

3. Sea $y(t; x)$ la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''' - t^3(y'')^2 - (y')^3 + x = 0, \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = 0, \end{cases}$$

   con $x \in \mathbb{R}$ fija y donde $'$ es la derivada con respecto a $t$.

   *a)* [**2 Puntos**] Dibujar, en el intervalo $x \in [0, 4]$, la función

$$z(x) = y'''(1; x) + y(1; x) - 2,$$

   y calcular los valores de $x \in [2, 4]$ tal que $z(x) = 0$.

   *b)* [**2 Puntos**] Calcular el valor de la integral

$$I = \int_1^2 \left[ \int_0^1 [y\,(t; x)^2 + y'\,(t; x)^2 + y''\,(t; x)^2] dt \right] dx.$$

# Soluciones

1. En primer lugar generamos la matriz $A$ y el vector $b$ con las funciones

```
function A=matrizA(n)
 .
 .

function b=vectorb(n)
.
.
```

   *a*) Para estudiar su convergencia hallamos los radios espectrales de los métodos de Jacobi y de Gauss Seidel

```
>> A=matrizA(9);
>> reJ=radioespectralJacobi(A)
>> reGS=radioespectralGaussSeidel(A)
```

   Obteniéndose 4,000000000000005 y 0,666666704412966 respectivamente por lo que el método de Jacobi no converge y el de Gauss Seidel si converge.

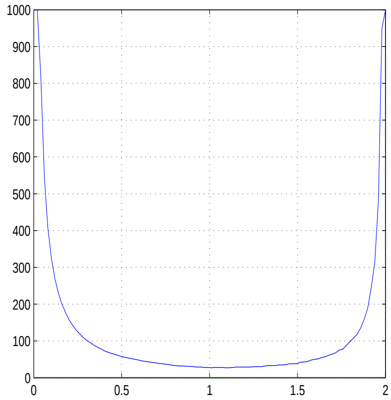
   *b*) Modificamos el criterio de paro del método SOR. Para responder a todas las cuestiones creamos un fichero de función.

```
function [wopt,kopt,Xopt]=prob1abdic07
.
.
```

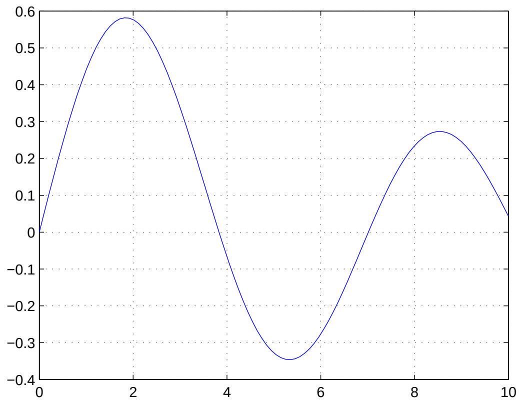
   Obteniéndose los siguientes resultados: $w_{opt} = 1{,}010101010101010$, $k_{opt} = 27$, la solución aproximada para $w_{opt}$ es:

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0{,}000075986194539 \\ -0{,}000228683634476 \\ 0{,}000114463741035 \\ 0{,}000208040208960 \\ -0{,}000268765064258 \\ 0{,}000106854618308 \\ -0{,}000012995966457 \\ -0{,}000000070014027 \\ 1{,}000000006433661 \end{pmatrix},$$

y el gráfico de $k$, las iteraciones, frente a $w$ es:




2. *a*) En primer lugar definimos la función de Bessel utilizando el método de Romber modificado, introduciendo el parámetro $\alpha$ como nueva entrada. A su vez el método de Romber modificado llama al método del trapecio modificado introduciendo como nueva variable de entrada el parámetro $\alpha$. Al dibujar la función $J_1(\alpha)$ obtenemos el siguiente gráfico.




Vemos que efectivamente existe una única raíz $\alpha^*$ de $J_1(\alpha) - 0{,}5$ en el intervalo $[0, 2]$. Para encontrar dicha raíz aplicamos Newton y utilizamos Richardson para calcular su derivada, resultando:

$$\alpha^* = 1{,}206718463005902$$

*b*) Para calcular $p_4(\alpha)$ utilizamos el comando `polyfit` obteniendose el vector:

$$[-0{,}004748130775150,\ 0{,}099054156312314,\ -0{,}640916838325416,\ 1{,}256230803209014,\ -0{,}000000000000026]$$

Por tanto el polinomio es

$$\begin{aligned} p_4(\alpha) &= -0{,}004748130775150\alpha^4 + 0{,}099054156312314\alpha^3 - 0{,}640916838325416\alpha^2 \\ &\quad +1{,}256230803209014\alpha - 0{,}000000000000026 \end{aligned}$$

Para responder a la segunda utilizamos el comando `spline` y obtenemos el siguiente gráfico:

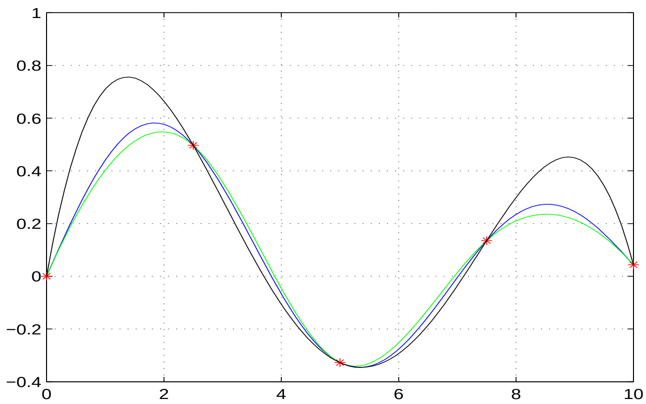



Figura 1: $J_1(\alpha)$ en azul, $p_4(\alpha)$ en negro, $s(\alpha)$ en verde y los 5 nodos en rojo

y los valores

$$\begin{aligned} J_1(\alpha^*) &= 0{,}499999999999999 \\ p_4(\alpha^*) &= 0{,}746621940458218 \\ s(\alpha^*) &= 0{,}639998703878668 \end{aligned}$$

3. a) La gráfica de la función $z(x)$ en el intervalo $[0, 4]$ es:

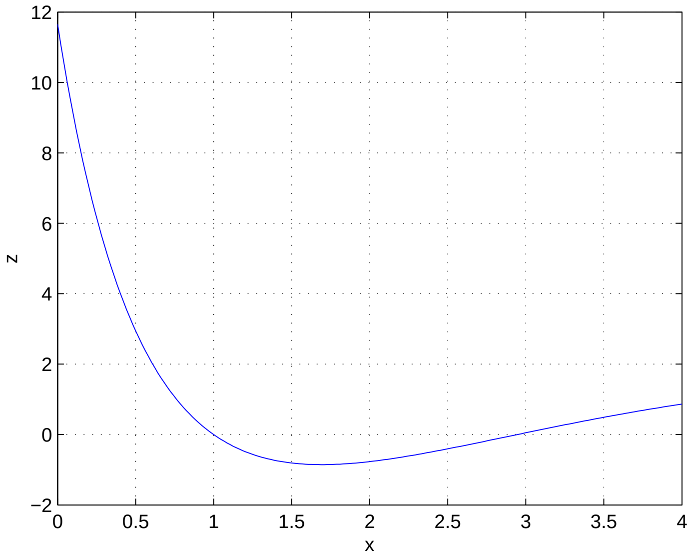



Figura 2: Gráfica de z(x)

Para calcular los valores de $z(x)$ hemos tomando $M = 20$ en el programa de Runge-Kutta de orden 4, con las modificaciones oportunas, para integrar el sistema de ecuaciones diferenciales.

Para calcular la raíz de $z(x)$ en $[2, 4]$ hemos utilizado el programa de la secante con $p_0 = 2{,}5$; $p_1 = 3{,}5$ y $tolerancia = 10^{-10}$, obteniéndose:

```
alcanzada la tolerancia en la iteración k=7, y la aproximación es:
```

$$x \approx 2{,}94619215801709.$$

b) La aproximación a la integral, usando el esquema de Romberg a partir de la regla compuesta del trapecio con $h = 0{,}1$ y tolerancia $10^{-3}$, con las modificaciones oportunas para la integral del corchete, es:

$$I \approx 3{,}24873005508928.$$