Examen de Análisis Numérico I
Tercer Curso de I.T. Informática
(Gestión y Sistemas) Modelo A
13 de Febrero de 2008

1. Sea el sistema de ecuaciones no lineal

$$\begin{cases} x^2 + x - z^2 = \frac{1}{4}, \\ z - sen(x^2) = \int_0^2 (sen(z))^3 dz, \end{cases}$$

   a) [**1.5 Puntos**] Hallar, mediante el método de Newton, una aproximación de la solución correspondiente a la condición inicial $P_0 = (-1, -1)$, con tolerancia 10^{-10}. ¿Cuantas iteraciones son necesarias?. Para calcular la integral utilizar Romberg con tolerancia 10^{-3} y $h = 0.1$.

   b) [**1.5 Puntos**] Para hallar las restantes soluciones transforma el sistema de ecuaciones dado en una única ecuación no lineal y representar gráficamente la función obtenida.

2. Sean las funciones $G(x) = x^2 \int_0^x sen(t^4)dt$ y $F(x)$ la única raíz de la ecuación $z^3 + z + x^2 = 0$, con $x \in R$, se pide:

   a) [**1.25 Puntos**] Aproximar la función $G(x)$ por el polinomio de interpolación que se obtiene al tomar cinco puntos de la gráfica de $y = G(x)$, siendo las abscisas cinco nodos de Chebyshev en el intervalo $[-2, 2]$.

   b) [**1.25 Puntos**] Aproximar la función $F(x)$ por la mejor aproximación, en el sentido de los mínimos cuadrados, usando cinco puntos de la gráfica de $y = F(x)$ con abscisas equiespaciadas, al espacio vectorial $S = < 1, cos(x), sen(x) >$.

   c) [**1 Puntos**] Utilizando las aproximaciones obtenidas en los apartados anteriores, calcular las raíces de la ecuación $F(x) = G(x)$ con $x \in [-2, 2]$.

3. Sea $y(t; x, z)$ la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' = ty' - t^2 y + t^3, \\ y(0) = x, \quad y'(0) = z, \end{cases}$$

   a) [**1.5 Puntos**] Representar gráficamente $y(t, 0, 1)$ en $[0.01, 1]$. (Usar Runge-Kutta tomando $n = 20$ subintervalos).

   b) [**2 Puntos**] Con objeto de calcular una solución del sistema de ecuaciones

$$F(x, z) = 2x + 2y(1; x, z) - 7 = 0,$$
$$G(x, z) = 2z + 2y'(1, x, z) - 1 = 0,$$

   usar el método de Newton partiendo de la aproximación inicial $P_0 = (1, 1)$, y con criterio de paro $\|P_k - P_{k-1}\| \leq 10^{-5}$ y $N_{max} = 20$. ¿Converge ?.

Soluciones

1. *a*) Siguiendo las especificaciones indicadas, para calcular el término independiente de la segunda ecuación mediante Romberg, se obtiene

```
>> newtonvectorial('S','JacobianoS',[-1,-1],10^(-10),30)

alcanzada la tolerancia para el error en la iteración k = 16

y la aproximación  es

 x =   1.48831102813371
 z =   1.85832740511410
```

   b) Despejando la variable z en la segunda ecuación y sustituyéndola en la primera ecuación, se obtiene una ecuación no lineal en la variable x, $f(x) = 0$, cuya gráfica mostramos a continuación:

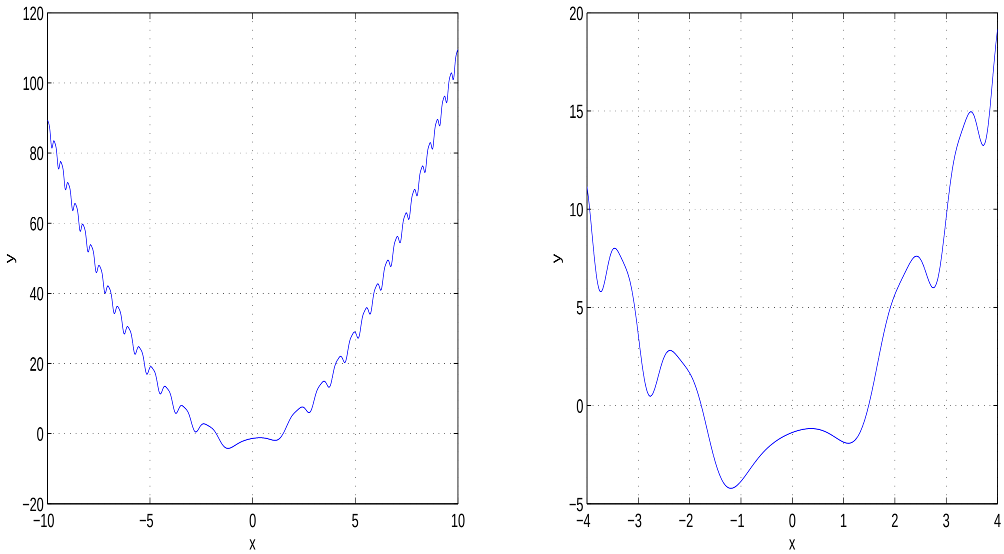


Figura 1: Gráfica de y=f(x)

Para hallar la otra raíz utilizamos el método de la secante

```
>> secante('f',-2,-1,10^(-10),30)

alcanzada la tolerancia para el error en la iteración k = 9

y la aproximación  es x = -1.77264287093569
```

Sustituyendo este valor de x en la expresión obtenida para z resulta

```
z = 1.05812091792169.
```

2. *a*) Utilizando Romberg para calcular $G(x)$, con tolerancia 10^{-3} y $h = 0.1$, se obtiene

```
Los nodos de Chebyshev en el intervalo $[-2,2]$ son

Nodos =[1.90211303259031 1.17557050458495   0 -1.17557050458495
-1.90211303259031],

el valor de G en los nodos

GNodos =[1.13832008195386   0.49084201502586   0 -0.49084201502586
-1.13832008195386],

los coeficientes del polinomio de interpolación en sentido
descendente

 AG= [0  0.08090770387962   0   0.30572346004497  0],

 y en consecuencia la aproximación es
```

$$AG(x) = 0{,}08090770387962x^3 + 0{,}30572346004497x.$$

b) Utilizando Newton para calcular $F(x)$, con tolerancia 10^{-10}, $p_0 = 0$, y máximo número de iteraciones 50 se obtiene

```
Los nodos equiespaciados en el intervalo $[-2,2]$ son

Nodos =[-2 -1 0 1 2],

el valor de F en los nodos

FNodos =[-1.37879670012955  -0.68232780382802  0 -0.68232780382802
-1.37879670012955],

los coeficientes de la combinación lineal

 C=[-1.04647859218206  0.88931685097854  0],

y en consecuencia la aproximación es
```

$$AF(x) = -1{,}04647859218206 + 0{,}88931685097854cos(x).$$

c) La representación gráfica, en la figura 2, de las aproximaciones calculadas en los apartados anteriores a las curvas $y = F(x)$ e $y = G(x)$ nos muestra que no hay soluciones de la ecuación $AF(x) - AG(x) = 0$ en el intervalo $[-2, 2]$. Sin embargo si hay soluciones de la ecuación $F(x) - G(x) = 0$, según vemos en la figura 3, en el citado intervalo.

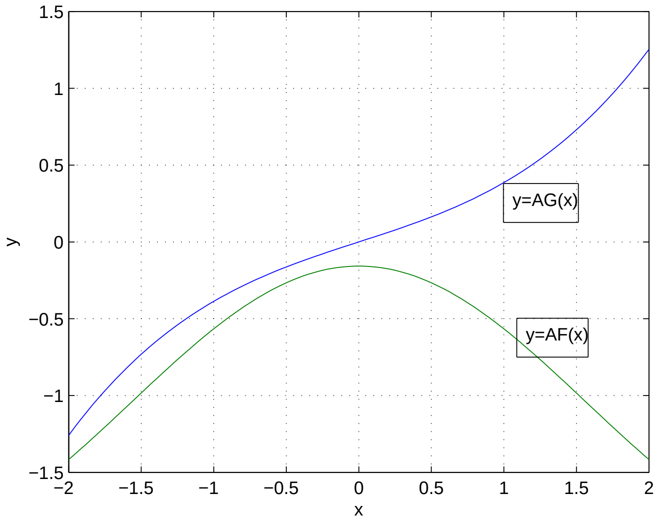


Figura 2: Gráficas de y=AF(x) e y=AG(x)

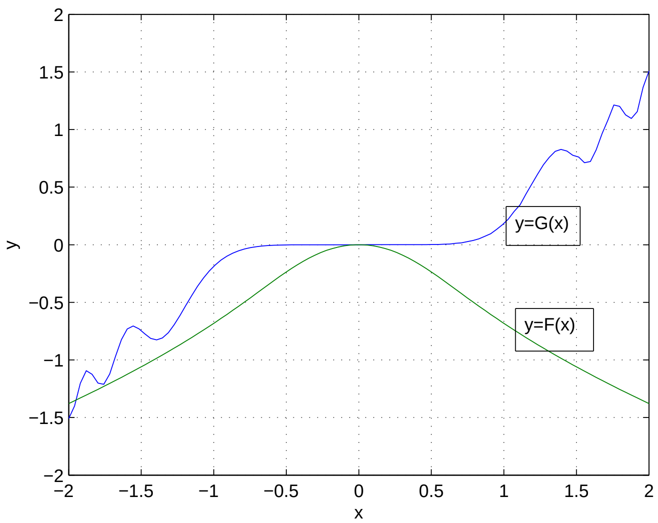
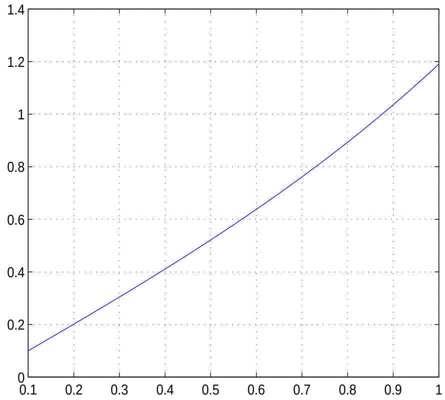


Figura 3: Gráficas de y=F(x) e y=G(x)

3. **a)** la gráfica de $y(t, 0, 1)$ en el intervalo $[0.01, 1]$ es:



b) La solución aproximada es

$$(x, z) = (1.591772918596002, 0.361671086914699)$$

obtenida con 2 iteraciones