Examen de Análisis Numérico I
Tercer Curso de I.T. Informática
5 de Septiembre de 2007. Modelo A

1. Dado el sistema de ecuaciones no lineal:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = y^4 + x - z^2 = 0, \\ F_2(x,y,z) = z^4 + y + x^3 e^z = 0, \\ F_3(x,y,z) = yx^2 + z - y^3 - 2 = 0. \end{cases}$$

   a) [**1 Punto**] Aplicar el método de Seidel partiendo de $P_0 = (-2, 1, -1)$, con criterio de paro: $||P_n - P_{n-1}||_\infty < 10^{-5}$ y número máximo de iteraciones igual a 50.

   b) [**2 Puntos**] Hallar una solución aproximada, y el número de iteraciones necesarias, aplicando el método de Newton con el mismo P_0 del apartado anterior y criterio de paro: $||P_n - P_{n-1}||_2 < 10^{-7}$ y $H(P_n) < 10^{-10}$, siendo $H(x,y,z) = F_1^2(x,y,z) + F_2^2(x,y,z) + F_3^2(x,y,z)$, y máximo número de iteraciones igual a 20.

2. Sea

$$H(t) = e^{-t} \int_t^{t+1} x^3 e^x dx,$$

   se pide:

   a) [**1.5 Puntos**] Calcular

$$I = \int_{-1}^{1} H(t) dt.$$

   Usar el esquema de Romberg con $h = 0{,}1$ y tolerancia $= 10^{-5}$.

   b) [**1.5 Puntos**] Calcular $H'''(\frac{1}{2})$ mediante alguna fórmula con extrapolación y usando para calcular $H(t)$ cinco nodos de Chebyshev en $[0, 1]$ e interpolar la tabla obtenida.

3. Sea $y(t; x)$ la solución del problema

$$\begin{cases} y'' = -\frac{\pi^2}{4} y + 2 + \frac{\pi^2}{4} \left(t^2 + x\right), \\ y(0; x) = x, \quad y(1; x) = x, \end{cases}$$

   con $x \in \mathbb{R}$ fija y donde $'$ es la derivada con respecto a t. Se pide:

   a) [**1 Punto**] Calcular $y(\frac{1}{3}; 1)$, $\;y'(\frac{1}{3}; 1)$.

   b) [**1 Punto**] Dibujar, en el intervalo $x \in [-2, 2]$, la función

$$z(x) = 5\; y(\frac{1}{5}; x) - 4\; x^2 + 2.$$

   y calcular los valores de $x \in [0, 2]$ tal que $z(x) = 0$.

   c) [**1 Punto**] Calcular $I = \displaystyle\int_0^1 \left[\int_1^2 |(y\,(t;x) - y'\,(t;x)|\, dx \right] dt,$

   d) [**1 Punto**] Calcular $\displaystyle\min_{t \in [0,1]} \left[\max_{0 \le x \le t^2} y\,(t;x) \right]$ y el punto donde se alcanza.

Soluciones

1. a) Despejando x en la primera ecuación, y en la segunda y z en la tercera, y siguiendo las especificaciones del enunciado se obtiene que en la segunda iteración se alcanza la tolerancia para el error y que una solución es:

$$x = 0, \; y = -1, \; z = 1.$$

   b) Siguiendo las especificaciones del enunciado se obtiene que en la quinta iteración se alcanza la tolerancia para ambos errores y que una solución es:

$$x \approx -2{,}02634773943394, \; y \approx 1{,}34028095685497, \; z \approx -1{,}09568997292495.$$

2. a) La aproximación a la integral, usando el esquema de Romberg a partir de la regla compuesta del trapecio con $h = 0{,}1$ y tolerancia 10^{-5}, es:

$$I \approx 3{,}12687268640460.$$

   b) La matriz con las aproximaciones a la derivada tercera, usando el esquema de Richardson es:

$$\begin{pmatrix} 0{,}10000000000000 & 10{,}30969097665879 & 0 & 0 \\ 0{,}05000000000000 & 10{,}30969097665490 & 10{,}30969097665361 & 0 \\ 0{,}02500000000000 & 10{,}30969097664069 & 10{,}30969097663596 & 10{,}30969097663478 \end{pmatrix}.$$

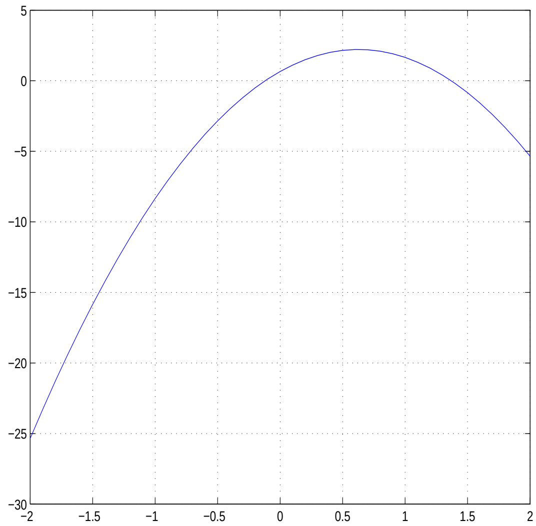
   En consecuencia

$$H'''(0{,}5) \approx 10{,}30969097663478.$$

3. a) Tomando $h = 0{,}1$ o bien $M = 10$ para el método del disparo, con las modificaciones oportunas, la aproximación es:

$$y\left(\frac{1}{3}; 1\right) \approx 0{,}61474835821046, \quad y'\left(\frac{1}{3}; 1\right) \approx -0{,}68999422622461.$$

   b) El gráfico de la función $z(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$ es el siguiente:



El valor de la única raíz $z(x_0) = 0$ con $x_0 \in [0, 2]$ utilizando el método de la secante con valores iniciales $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, tolerancia $tol = 10^{-5}$ y número máximo de pasos 100, es

$$x_0 \approx 1{,}36955117287914$$

c) La aproximación a la integral, usando el esquema de Romberg a partir de la regla compuesta del trapecio con $h = 0{,}1$ y tolerancia 10^{-3}, es:

$$I \approx 1{,}31511902363155$$

d) Utilizando un incremento 0,01 para t y x. Y considerando la malla de puntos $t = 0 : 0{,}01 : 1$, $x = 0 : 0{,}01 : t^2$, se obtiene:

$$\min_{t\in[0,1]} \left[\max_{0\leq x\leq t^2} y\,(t;x) \right] \approx -0{,}28312517251234.$$

siendo $(t, x) = (0{,}33, 0{,}1)$ el punto donde se alcanza.