Examen de Análisis Numérico I
Tercer Curso de I.T. Informática
(Gestión y Sistemas) Modelo A
10 de Septiembre de 2008

1. Dada la matriz cuadrada de orden n, $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ y la matriz columna $n \times 1$, $b = (b_1, \cdots, b_n)^T$ donde $a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$ y $b_k = e^{-k}$, $1 \leq k \leq n$. Para $n = 5$, se pide:

   a) [**1 Punto**] Hallar los radios espectrales de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel. ¿Convergen dichos métodos?.

   b) [**1,5 Puntos**] Calcular w_{opt} en el método de S.O.R., para lo cual tomar 100 puntos equiespaciados de $w \in [0, 2]$ y hallar el mínimo discreto del radio espectral para el método SOR. Resolver $Ax = b$ usando w_{opt}, con criterio de paro $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < 10^{-3}$ y número máximo de iteraciones $N_{max} = 10000$. ¿Cuántas iteraciones son necesarias, partiendo de $x^{(0)} = (0, \cdots, 0)^T$?. Justificar la respuesta.

2. Sea $F(x)$ la única raíz de la ecuación $\operatorname{sen}(xt) - t + 0.1 = 0$, con $x \in [-2, 2]$ y $G(x) = \int_0^1 \left[\frac{\cos(xt)}{2} - 2\operatorname{sen}(x^2 \operatorname{sen}(t))\right] dt$. Para calcular $F(x)$ utilizar secante con $tol = 10^{-5}$ y condiciones iniciales $p_0 = 0$, $p_1 = 1$. Para calcular $G(x)$ utilizar Romberg con $tol = 10^{-12}$ y $h = 0.1$.

   a) [**1 Punto**] Representar en una misma ventana gráfica ambas funciones $y = F(x)$, $y = G(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$. Hallar la raíz de $F(x) = G(x)$ en el mismo intervalo.

   b) [**1 Punto**] Aproximar la función $F(x)$ por el polinomio de interpolación $\widehat{F}(x)$ que se obtiene al tomar cinco puntos de la gráfica de $y = F(x)$, siendo las abscisas cinco nodos de Chebyshev en el intervalo $[-2, 2]$.

   c) [**1 Punto**] Aproximar la función $G(x)$ por la mejor aproximación $\widehat{G}(x)$ en el sentido de los mínimos cuadrados, usando cinco puntos de la gráfica de $y = G(x)$ con abscisas equiespaciadas en $[-2, 2]$, al espacio vectorial $< 1, \cos(x), \operatorname{sen}(x) >$.

   d) [**0,5 Puntos**] Calcular la raíz de $\widehat{F}(x) = \widehat{G}(x)$

3. Sea $y(t; x)$ la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} 2\,y''' - t^2 y'' + xy - 2 = 0, \\ y(0; x) = x,\ y'(0; x) = 1,\ y''(0; x) = 1, \end{cases}$$

   con $x \in \mathbb{R}$ fija y donde $'$ es la derivada con respecto a t.

   a) [**2 Puntos**] Calcular $y(1; 1)$. Dibujar, en el intervalo $x \in [0, 2]$, la función

$$f(x) = [y'''(1; x)]^2 + [y''(1; x)]^2 - (1 + x)^2,$$

   y calcular el máximo y minímo discreto de la función $f(x)$, así como los valores x donde se alcanzan, tomando 200 puntos en el intervalo considerado.

   b) [**2 Puntos**] Calcular $|y^{IV)}(1; 1)|$. Calcular el valor de la integral

$$I = \int\int_R |y^{IV)}\,(t; x)\,|\,dx\,dt,$$

   siendo $R = \{(t, x)/0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq t\}$.

Soluciones

1. En primer lugar generamos la matriz A y el vector b con las funciones

```
function A=matrizA(n)
% nxn dimensión de la matriz
A=zeros(n,n); for i=1:n
 for j=1:n
    A(i,j)=1/(i+j-1);
 end

function b=vectorb(n)
b=zeros(n,1); for i=1:n b(i)=exp(-i); end
```

   a) Para estudiar su convergencia hallamos los radios espectrales de los métodos de Jacobi y de Gauss Seidel

```
>> A=matrizA(5);
>> reJ=radioespectralJacobi(A)
>> reGS=radioespectralGaussSeidel(A)
```

   Obteniéndose

$$\begin{aligned} \rho_J &= 3.44414219116596, \\ \rho_{GS} &= 0.99995767122296, \end{aligned}$$

   respectivamente por lo que el método de Jacobi no converge y el de Gauss Seidel si converge aunque muy lentamente.

   b) El mínimo del radio espectral para SOR ρ_{opt} se consigue para el w_{opt} siendo en este caso:

$$\begin{aligned} w_{opt} &= 1.85858585858586, \\ \rho_{opt} &= 0.99995621068797 \end{aligned}$$

   Por tanto para este valor w_{opt} la convergencia del método SOR respecto del de Gauss-Seidel mejora levemente y sigue siendo muy lenta.

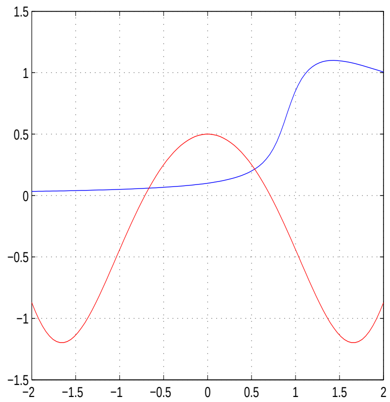
   c) Al aplicar el método SOR con tol $= 10^{-3}$, $N_{max} = 10000$ y condición inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 0)^T$, obtenemos los siguientes resultados:

$$k_{opt} = 6518$$

   y la solución aproximada para w_{opt} es:

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} -0.51603426415799 \\ 5.47728236245989 \\ 9.76259592281151 \\ -46.13144372050643 \\ 32.11960922071459 \end{pmatrix}.$$

2. *a*) Después de definir las funciones $y = F(x)$, $y = G(x)$ siguiendo las indicaciones, obtenemos el siguiente gráfico:



donde $y = F(x)$ está dibujada en azul y $y = G(x)$ en rojo.
Para calcular las posibles raíces de $F(x) - G(x) = 0$ aplicamos el método de la secante con tolerancia $tol = 10^{-5}$ y condiciones iniciales $p_0 = 0$, $p_1 = 1$ dadas en el enunciado. Obteniéndose la solución:

$$x_2^* = 0.535143366637715$$

Si tomamos las condiciones iniciales $p_0 = -1$, $p_1 = 0$ obtenemos la otra solución:

$$x_1^* = -0.666956045740200$$

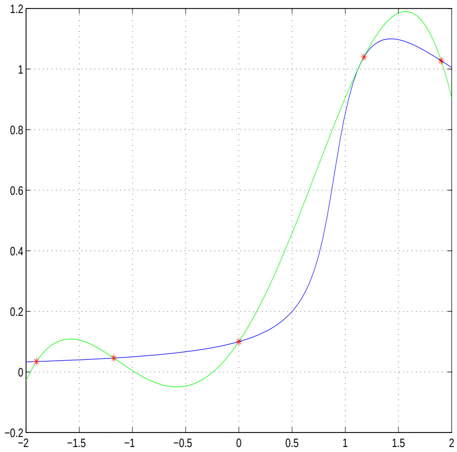
b) Los cinco puntos de la gráfica de $y = F(x)$ cuyas abscisas son cinco nodos de Chebychev en el intervalo $[-2, 2]$ son:

X	Y
-1.90211303259031	0.03447384287073
-1.17557050458495	0.04597704916444
0.00000000000000	0.10000000000000
1.17557050458495	1.03997893113083
1.90211303259031	1.02739135072833

y el polinomio que interpola dichos nodos es:

$$\begin{aligned}\widehat{F}(x) &= -0.09008449052893x^4 - 0.07234593983842x^3 + 0.44503558897621x^2 \\ &\quad +0.52275388210772x + 0.10000000000000\end{aligned}$$

En el siguiente gráfico se muestra los nodos en rojo, la función $y = F(x)$ en azul y el polinomio interpolador $y = \widehat{F}(x)$ en verde



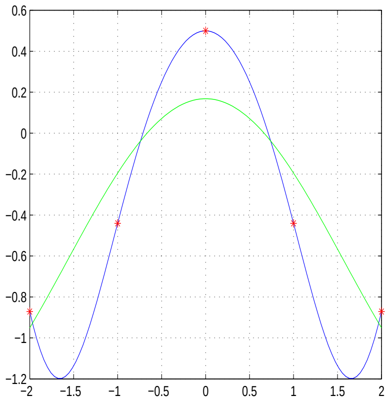
c) Los cinco puntos de la gráfica de $y = G(x)$ cuyas abscisas son cinco nodos equiespaciados en el intervalo $[-2, 2]$ son:

X	Y
-2.00000000000000	-0.871259418532405
-1.00000000000000	-0.440476713837433
0	0.50000000000000
1.00000000000000	-0.440476713837433
2.00000000000000	-0.871259418532405

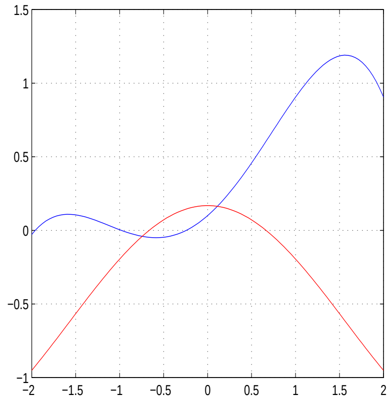
la función que mejor se aproxima en el sentido de los mínimos cuadrados al espacio funcional $< 1, \cos(x), \mathrm{sen}(x) >$ a los cinco nodos es:

$$\widehat{G}(x) \quad = \quad -0.622028768979387 + 0.790405298563380\cos(x) + 0.0\,\mathrm{sen}(x)$$

En el siguiente gráfico se muestra los nodos en rojo, la función $y = G(x)$ en azul y la función $y = \widehat{G}(x)$ en verde



d) En el siguiente dibujo aparecen representadas la función $y = \widehat{F}(x)$ en azul y la función $y = \widehat{G}(x)$ en rojo.



el valor de la solución de $\widehat{F}(x) - \widehat{G}(x) = 0$, aplicando el método de la secante con tolerancia $tol = 10^{-5}$ y condiciones iniciales $p_0 = 0$, $p_1 = 1$ es:

$$\hat{x}_2^* = 0.111164131705374$$

y con condiciones iniciales $p_0 = -1$, $p_1 = -0.5$ es:

$$\hat{x}_1^* = -0.743872599686559$$

3. a) Para calcular los valores $y(t; x)$ hemos tomando $M = 20$ en el programa de Runge-Kutta de orden 4, con las modificaciones oportunas, para integrar el sistema de ecuaciones diferenciales obteniendose $y(1; 1) \approx 2{,}5680137$.

   La gráfica de la función $f(x)$ en el intervalo $[0, 2]$ es:

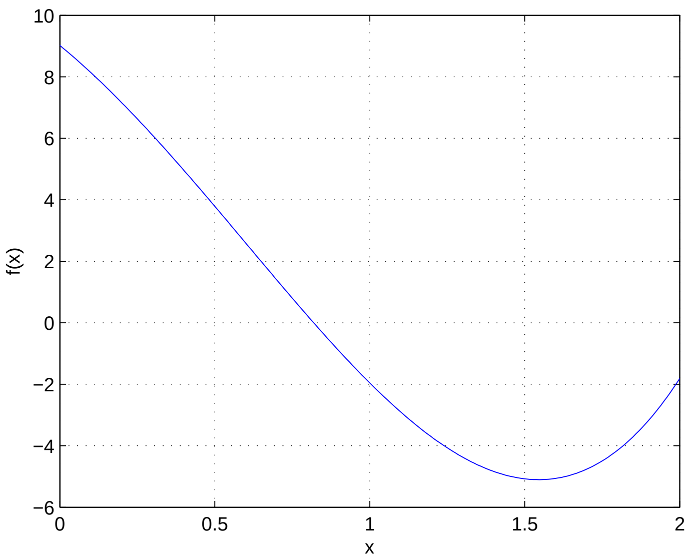


Figura 1: Gráfica de f(x)

Tomando 200 puntos en el intervalo considerado, y con las especificaciones indicadas, el máximo discreto es $f(x) \approx 9{,}01914378156$, y lo alcanza en $x = 0$. El mínimo vale $f(x) \approx -5{,}10245580705$, y lo alcanza en $x \approx 1{,}547738693467$.

b) Para obtener la derivada cuarta de la solución $y(t;x)$, derivamos la ecuación diferencial respecto a la variable t y despejamos, resultando:

$$y^{IV)} = \frac{t^2}{2}y''' + ty'' - \frac{x}{2}y'.$$

Utilizando los programas del apartado anterior se obtiene $|y^{IV)}(1;1)| \approx 0{,}4750425798$. Considerando la región R definida como:

$$R = \{(t,x)/0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq t\},$$

el valor de la integral, usando el esquema de Romberg a partir de la regla compuesta del trapecio con $h = 0{,}1$ y tolerancia 10^{-3}, con las modificaciones oportunas para calcular la primera de las integrales, es:

$$I \approx 0{,}556382456.$$