Examen de Análisis Numérico I
Tercer Curso de I.T. Informática
(Gestión y Sistemas)
5 de Febrero de 2007

1. Sea $y(t;x)$ la solución del problema

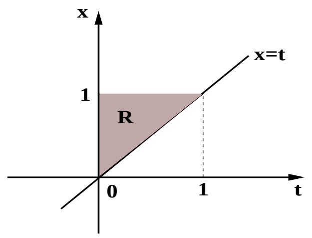
$$\begin{cases} y'' = 2y' - y + t^2 - 1 + x, \\ y(0;x) = x + 5, \quad y(1;x) = x + 10, \end{cases}$$

con $x \in R$ fija y donde $'$ es la derivada con respecto a t. Se pide:

a) [**1.5 Puntos**] Calcular $y(\frac{2}{3};\frac{1}{2})$, $\;y''(\frac{2}{3};\frac{1}{2})$.

b) [**1.5 Puntos**] Calcular, en la región R del dibujo, el valor de la integral

$$\int\int_R \left| y^{4)}(t;x) \right| dt dx,$$



c) [**1 Punto**] Calcular

$$\max_{(t,x)\in R} |y'(t;x) + 2\ x|,$$

y el punto donde se alcanza.

2. Dada la función $F(x) = \int_0^1 2\,\mathrm{sen}(-x^3\,\mathrm{sen}(t)) + \frac{1}{2}\cos(-xt)dt$.

a) [**1.5 Puntos**] Calcular las soluciones de $F(x) = 0$, $x \in [0,2]$, con 10 cifras decimales exactas. Para ello, dibujar $F(x)$ en $[0,2]$ tomando 100 puntos. Utilizar un malla para encontrar intervalos donde se encuentre la raíz con error menor que 10^{-1}. Tomar los extremos de dichos intervalos como puntos iniciales del método de la secante. Para calcular $F(x)$ utilizar Romberg con $h = 0.1$ y tolerancia 10^{-12}.

b) [**1 Punto**] Calcular $F'(0)$ y $F'(2)$ utilizando Richardson con tolerancia 10^{-3}.

c) [**1 Punto**] Hallar los valores $p(x_0)$, donde x_0 son las raíces de $F(x)$ encontradas en el apartado **a)** y $p(x)$ un spline cúbico sujeto que interpola la función $F(x)$ tomando 6 nodos equiespaciados en el intervalo $[0,2]$

3. [**2.5 Puntos**] Dada la matriz $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = 1 + |j - i|$, $1 \leq i,j \leq 10$ y el vector columna $b = (b_i)$, $b_i = 1$, $i = 1, \cdots, 10$. Calcular ω_{opt} (ω que hace el radio espectral mínimo) y resolver por el método S.O.R. el sistema $Bx = b$, donde $B = A^tA$, con criterio de paro $\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| < 10^{-4}$. ¿Cuántas iteraciones son necesarias partiendo de $x^{(0)} = (0, \cdots, 0)$?.

Soluciones

1. a) Tomando $h = 0{,}05$ o bien $M = 20$ para el método del disparo, con las modificaciones oportunas, la aproximación es:

$$y\left(\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right) \approx 8{,}61166668233183, \quad y''\left(\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right) \approx 1{,}99999945682457.$$

   b) La aproximación a la integral, usando el esquema de Romberg a partir de la regla compuesta del trapecio con $h = 0{,}1$ y tolerancia 10^{-3}, es:

$$I \approx 4{,}493995493406703e - 007.$$

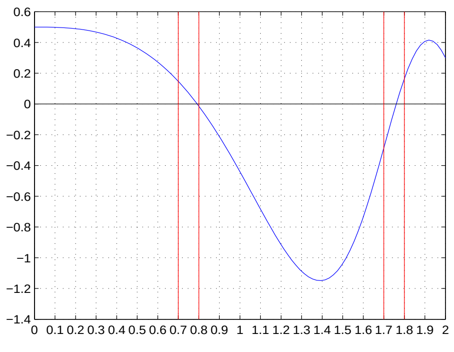
   c) Utilizando un *incremento* $= 0{,}05$ para $t = 0 : \textit{incremento} : 1$, y el mismo incremento para $x = t : \textit{incremento} : 1$, se obtiene:

$$\max_{(t,x)\in R} |y'(t;x) + 2\ x| \approx 7{,}99999966033194.$$

   siendo $(t, x) = (1, 1)$ el punto donde se alcanza.

2. *a*) En primer lugar definimos la función $F(x)$ utilizando Romber modificado para que admita el parámetro x dentro del integrando tomando 10 filas del triángulo de Romberg, $h = 0{,}1$ y tolerancia 10^{-12}.

   Utilizando 100 nodos en el intervalo $[0, 2]$ obtenemos el siguiente gráfico de la función $F(x)$.



   Como se puede apreciar en el dibujo, hay dos soluciones $F(x) = 0$ una en el intervalo $[0.7, 0.8]$ y la otra en el intervalo $[1.7, 1.8]$.

   Al utilizar secante con los extremos de dichos intervalos obtenemos las dos siguientes aproximaciones:

$$x_1 = 0{,}79192236162155, \quad x_2 = 1{,}76064518008397$$

   b) Los valores obtenidos utilizando Richardson con incremento inicial $h = 0{,}1$, tolerancia 10^{-3} y 20 como número máximo de iteraciones son:

$$F'(0) = 0{,}00000000001222, \quad F'(2) = -2{,}75430813313328$$

c) Utilizando la orden `spline` de Matlab obtenemos que los valores del spline cúbico sujeto en los valores x_1, x_2 obtenidos en el apartado anterior son:

$$p(x_1) = 0{,}00132632575831, \quad p(x_2) = -0{,}06713557603605$$

3. Definimos en primer lugar las matrices A, B y el vector b. Definimos también un vector `w=linspace(0,2,100);`. Para cada una de sus componentes hallamos el radio espectral del método S.O.R. para la matriz B. Los radios espectrales los almacenamos en otro vector del cual hallamos su máximo obteniendose:

$$\omega_{opt} = 1{,}37373737373737$$

Aplicamos posteriormente el método S.O.R. para ω_{opt}, valor inicial y criterio de parada especificados y obtenemos

$$\begin{pmatrix} -0{,}03669046819146 \\ 0{,}04668486943225 \\ -0{,}00242098504918 \\ -0{,}00160224098519 \\ 0{,}00301360012526 \\ 0{,}00287062091796 \\ -0{,}00980629314138 \\ 0{,}01036922322528 \\ 0{,}04053976404041 \\ -0{,}03652706102560 \end{pmatrix}$$

como aproximación a la solución en 421 iteraciones.