Examen de Análisis Numérico I
Tercer Curso de I.T. Informática
(Gestión y Sistemas) Modelo B
13 de Febrero de 2008

1. Sea el sistema de ecuaciones no lineal

$$\begin{cases} e^x e^y + x cos(y) = 0, \\ x + y = 1 - \int_0^1 (cos(y))^5 dy, \end{cases}$$

   a) [**1.5 Puntos**] Hallar, mediante el método de Newton, una aproximación de la solución correspondiente a la condición inicial $P_0 = (0,0)$, con tolerancia 10^{-10}. ¿Cuantas iteraciones son necesarias?. Para calcular la integral utilizar Romberg con tolerancia 10^{-3} y $h = 0.1$.

   b) [**1.5 Puntos**] Para hallar las restantes soluciones en el intervalo $[-6, 6]$ transforma el sistema de ecuaciones dado en una única ecuación no lineal y representar gráficamente la función obtenida.

2. Sea G(q) la única raíz real de la ecuación $x^3 + x + q$, con $q \in R$, se pide:

   a) [**1 Puntos**] Calcular $\int_0^1 G(q)dq$.

   b) [**1 Puntos**] Calcular $G'''(\frac{1}{3})$ mediante alguna fórmula con extrapolación.

   Para calcular $G(q)$ usar Newton con tolerancia 10^{-3} y $x_0 = 1$, y para la integral Romberg con $h = 0.1$ y tolerancia 10^{-3}.

   c) [**1.5 Puntos**] Rehacer los apartados anteriores, usando para calcular $G(q)$ cuatro nodos de Chebyshev en el intervalo $[0, 1]$ e interpolar la tabla obtenida.

3. Sea $y(t; x)$ la solución del problema

$$\begin{cases} y'' = 4y + 4(e^2 - e^{-2})xt, \\ y(0; x) = 0, \quad y(1; x) = -(e^2 - e^{-2})(x + 1), \end{cases}$$

   con $x \in [-1, 1]$ fija y donde $'$ es la derivada con respecto a t. Se pide:

   a) [**1 Punto**] Dibujar, en el intervalo $x \in [0, 1]$, la función

$$z(x) = 4\ y(0.2; x) - 3\ x^2 + [y'(0.2; x)]^2 - 40.$$

   b) [**1 Punto**] Calcular los valores de $x \in [0, 1]$ tal que $z(x) = 0$. Utilizar el método de la secante con tolerancia tol $= 10^{-3}$ y valores iniciales $p_0 = 0$, $p_1 = 0.5$.

   c) [**1.5 Puntos**] Calcular

$$\max_{(t,x)\in R} \left| \frac{1}{10} y'(t; x) + 4\ x^2 + 7(t - \frac{1}{2})^2 \right|,$$

   y el punto donde se alcanza, siendo $R = \left\{(t, x) : \frac{4}{10} \leq t \leq \frac{8}{10},\ -\frac{2}{10} \leq x \leq \frac{4}{10}\right\}$. Tomar una malla de 400 puntos, 20 puntos en cada intervalo. Para el método del disparo utilizar $n = 50$ intervalos.

Soluciones

1. *a*) Siguiendo las especificaciones indicadas, para calcular el término independiente de la segunda ecuación mediante Romberg, se obtiene

```
>> newtonvectorial('S','JacobianoS',[0,0],10^(-10),30)

alcanzada la tolerancia para el error en la iteración k = 9

y la aproximación  es

 x = -4.59702019734390
 z =  5.06838758678449
```

   b) Despejando la variable x en la segunda ecuación y sustituyéndola en la primera ecuación, se obtiene una ecuación no lineal en la variable y, $f(y) = 0$, cuya gráfica mostramos a continuación:

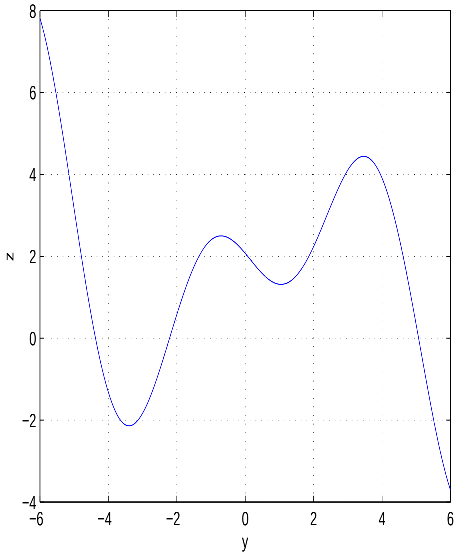


Figura 1: Gráfica de z=f(y)

   Para hallar las otras soluciones utilizamos el método de la secante

```
>> secante('f',-2,-4,10^(-10),30)

alcanzada la tolerancia para el error en la iteración k = 19

y la aproximación  es y = -2.21094460893378
```

   Sustituyendo este valor de y en la expresión obtenida para x resulta

```
x = 2.68231199837438.
```

```
>> secante('f',-4,-6,10^(-10),30)

alcanzada la tolerancia para el error en la iteración k = 8

y la aproximación  es y = -4.37549078512133
```

Sustituyendo este valor de y en la expresión obtenida para x resulta

```
x = 4.84685817456193.
```

2. a) Usando Newton, con tolerancia 10^{-3} y $x_0 = 1$, para calcular $G(q)$, y para la integral Romberg, con $h = 0.1$ y tolerancia 10^{-3}, se obtiene:

$$I \approx 0{,}39535330886339.$$

   b) Utilizando la fórmula centrada de cinco puntos, para calcular la derivada tercera, y la fórmula de extrapolación de Richardson para el elemento $R(5,5)$:

$$G'''\left(\frac{1}{3}\right) \approx -0{,}69242967170200.$$

   c) Los nodos de Chebyshev en el intervalo $[0,1]$ son
   Nodos =[0.96193976625564   0.69134171618254   0.30865828381746   0.03806023374436],

   el valor de G en los nodos
   GNod. =[-0.66622799250547   -0.53672518564259   -0.28540930485789   -0.03800533861467],

   y el polinomio interpolador $G(q)$ es

$$G(q) = -0{,}131596848454 58x^3 + 0{,}53087010991227x^2 - 1{,}08407454014228x + 0{,}00249303859094.$$

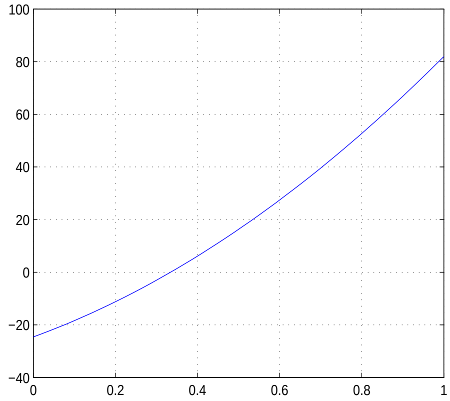
   El valor de la integral viene dado por

$$I \approx 0{,}39548674028976,$$

   y el valor de la derivada

$$G'''\left(\frac{1}{3}\right) \approx -0{,}78958109077650.$$

3. *a*) Después de crear los dos sistemas asociados para obtener la solución y de crear la función $z(x)$. Obtenemos la siguiente gráfica de $z(x)$ definida en $[0,2]$



b) Al aplicar el método de la secante con tolerancia 10^{-3} y valores iniciales $p_0 = 0$, $p_1 = 0.5$ obtenemos la solución $x^* = 0.334404314730070$.

c) Al tomar 20 puntos sobre cada uno de los intervalos $[\frac{4}{10}, \frac{8}{10}]$, $[-\frac{2}{10}, \frac{4}{10}]$ se obtiene el valor máximo 0.688393418642231 en el punto $(t, x) = (0.589473684210526, 0.084210526315789)$.