Examen de Análisis Numérico I
Tercer Curso de I.T. Informática
5 de Septiembre de 2007. Modelo B

1. Consideremos el sistema de ecuaciones no lineal:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 2y^2 - x - z^4 - e^z = 0, \\ F_2(x,y,z) = x^3 - y - xz^2 - 2 = 0, \\ F_3(x,y,z) = x - 2xy^3 - z - 3 = 0. \end{cases}$$

   a) [**1 Punto**] Para resolver el sistema $F_1(x,y,0) = F_3(x,y,0) = 0$, encontrar una función para que el algoritmo de punto fijo sea convergente, partiendo de $P_0 = (0,0)$, con criterio de paro: $||P_n - P_{n-1}||_\infty < 10^{-5}$ y número máximo de iteraciones igual a 50. Hallar la aproximación a la solución y el número de iteraciones necesarias.

   b) [**2 Puntos**] Aplicar el algoritmo de máximo descenso, partiendo de $P_0 = (0,0,0)$, hasta que sea $H(x,y,z) = F_1^2(x,y,z)+F_2^2(x,y,z)+F_3^2(x,y,z) < 10^{-2}$, siendo el número máximo de iteraciones igual a 50. ¿Converge con las especificaciones dadas?. En caso afirmativo hallar la aproximación P_n, las iteraciones necesarias y el valor $H(P_n)$.

2. Sea

$$H(t) = e^{-t}\int_t^{t+1} x^3 e^x dx,$$

   se pide:

   a) [**1.5 Puntos**] Calcular $H'''(\frac{1}{6})$ usando alguna fórmula con extrapolación y para calcular $H(t)$ utilizar Romberg con $h = 0{,}1$ y tolerancia $= 10^{-7}$.

   b) [**1.5 Puntos**] Calcular

$$I = \int_{-1}^{1} H(t)dt,$$

   usando para calcular $H(t)$ seis nodos de Chebyshev en $[-1,1]$ e interpolar la tabla obtenida y para calcular I utilizar Romberg con $h = 0{,}1$ y tolerancia $= 10^{-3}$.

3. Sea $y(t;x)$ la solución del problema

$$\begin{cases} y'' = -\frac{\pi^2}{4}y + 4 + \frac{\pi^2}{4}\left(2t^2 + x\right), \\ y(0;x) = x, \quad y(1;x) = x - 1, \end{cases}$$

   con $x \in \mathbb{R}$ fija y donde $'$ es la derivada con respecto a t. Se pide:

   a) [**1 Punto**] Calcular $y(\frac{1}{3};1)$, $\;y'(\frac{1}{3};1)$.

   b) [**1 Punto**] Dibujar, en el intervalo $x \in [-2,2]$, la función

$$z(x) = 5\; y(\frac{3}{5};x) - 4\;x^2 + 8.$$

   y calcular los valores de $x \in [1,2]$ tal que $z(x) = 0$.

   c) [**1 Punto**] Calcular $I = \displaystyle\int_0^1 \left[\int_1^2 |(y''(t;x) - y'(t;x)|\, dx\right] dt,$

   d) [**1 Punto**] Calcular $\displaystyle\min_{t\in[0,1]}\left[\max_{0\le x\le t^2} y\,(t;x)\right]$ y el punto donde se alcanza.

Soluciones

1. a) La función G de iteración que listamos a continuación hace que el algoritmo de punto fijo sea convergente.

```
function Z=G(X)
x=X(1);
y=X(2);
Z=[3./(1-2*(y.^3)),-sqrt((x+1)/2)];
```

   Siguiendo las especificaciones del enunciado se obtiene que en la iteración 34 se alcanza la tolerancia exigida y una solución es:

$$x \approx 1{,}00000958180714, \;\; y \approx -1{,}00000479090357.$$

   b) Siguiendo las especificaciones del enunciado se obtiene que en la septima iteración se alcanza la tolerancia para $H(x, y, z)$ y que una solución es:

$$x \approx 1{,}03095358402093, \;\; y \approx -0{,}93386909710532, \;\; z \approx -0{,}25067814681957,$$

   siendo $H(P_7) = 0{,}00751666839233$.

2. a) La matriz con las aproximaciones a la derivada tercera, usando el esquema de Richardson es:

$$\begin{pmatrix} 0{,}10000000000000 & 10{,}30969097075404 & 0 & 0 \\ 0{,}05000000000000 & 10{,}30969097075829 & 10{,}30969097075970 & 0 \\ 0{,}02500000000000 & 10{,}30969097076451 & 10{,}30969097076658 & 10{,}30969097076704 \end{pmatrix}.$$

   En consecuencia

$$H'''(\frac{1}{6}) \approx 10{,}30969097076704.$$

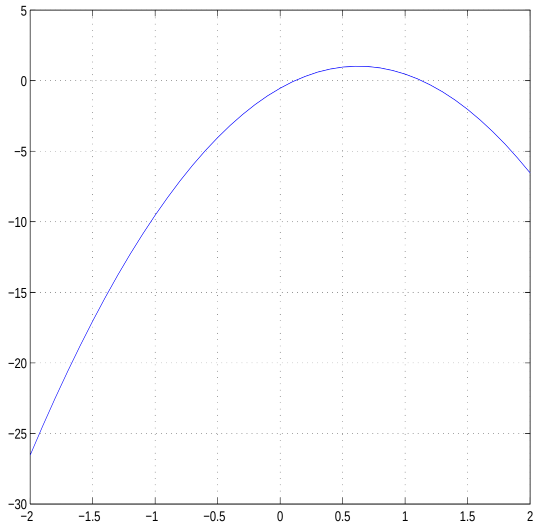
   b) La aproximación a la integral, usando el esquema de Romberg a partir de la regla compuesta del trapecio con $h = 0{,}1$ y tolerancia 10^{-3}, es:

$$I \approx 3{,}12668484006925.$$

3. a) Tomando $h = 0{,}1$ o bien $M = 10$ para el método del disparo, con las modificaciones oportunas, la aproximación es:

$$y\left(\frac{1}{3}; 1\right) \approx -0{,}26909011705216, \quad y'\left(\frac{1}{3}; 1\right) \approx -2{,}73665165301377.$$

b) El gráfico de la función $z(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$ es el siguiente:



c) El valor de la única raíz $z(x_0) = 0$ con $x_0 \in [1, 2]$ utilizando el método de la secante con valores iniciales $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, tolerancia $tol = 10^{-5}$ y número máximo de pasos 100, es

$$x_0 \approx 1{,}13177942668338$$

La aproximación a la integral, usando el esquema de Romberg a partir de la regla compuesta del trapecio con $h = 0{,}1$ y tolerancia 10^{-3}, es:

$$I \approx 9{,}69652437969977$$

d) Utilizando un incremento 0,01 para t y x. Y considerando la malla de puntos $t = 0 : 0{,}01 : 1$, $x = 0 : 0{,}01 : t^2$, se obtiene:

$$\min_{t\in[0,1]} \left[\max_{0\leq x\leq t^2} y\,(t; x) \right] \approx -1{,}37130881866584.$$

siendo $(t, x) = (0{,}5, 0{,}25)$ el punto donde se alcanza.