Examen de Análisis Numérico I
Tercer Curso de I.T. Informática
(Gestión y Sistemas) Modelo B
10 de Septiembre de 2008

1. Sea el sistema de ecuaciones no lineal

$$\begin{cases} F(x,y) = \int_0^{x+1} \cos(t^2)dt + xy - 2 = 0, \\ G(x,y) = x(x-y)^2 + \int_0^y (\operatorname{sen}(t^2) + xt)dt - 1 = 0. \end{cases}$$

   a) [**1,5 Puntos**] Construir una malla de 40000 puntos para $x \in [0,1]$, $y \in [0,3]$, y obtener el valor mínimo de $h(x,y) = F(x,y)^2 + G(x,y)^2$. Para calcular la integral utilizar Romberg con tolerancia 10^{-3} y $h = 0.1$.

   b) [**1.5 Puntos**] Aplicar máximo descenso, tomando como condición inicial $P_0 = [0.5, 2]$, tolerancia 10^{-2}, $N_{max} = 100$ y condición de parada $h(P_k) < tol$. ¿Converge?. ¿Cuál es la aproximación obtenida?. ¿Y el valor de $h(x,y)$ en dicha aproximación?.

2. Sea $G(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ la llamada función Gamma de Euler.

   a) [**1 Punto**] Halla $G'(1)$ empleando el método de extrapolación de Richardson. Empieza en $h = 0.5$ y toma como valor aproximado el $R(5,5)$ siendo R la tabla de Richardson que se construye. Para la definición de la función $G(x)$ utiliza Romberg con tolerancia 10^{-3} truncando la integral en el intervalo $[0.01, 50.01]$.

   b) [**1 Punto**] Calcular numéricamente las derivadas parciales $\frac{\partial f(1,2)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(1,2)}{\partial y}$ de la función $f(x,y) = G\left(e^{xG(xy)}\right)$. Para Richardson utilizar $h = 0.1$ y $tol = 10^{-3}$.

   c) [**1 Punto**] Calcular $\int_{0.5}^1 \left(\int_1^{1.5} f(x,y)dy\right) dx$. Para el método de Romberg, tomar $h = 0{,}1$ y $tol = 10^{-3}$.

3. Sea $y(t;x)$ la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} 3\,y'' - x^2y' + ty + 3 = 0, \\ y(1;x) = 1,\ y'(1;x) = 1 + x^2, \end{cases}$$

   con $x \in \mathbb{R}$ fija y donde $'$ es la derivada con respecto a t.

   a) [**2 Puntos**] Calcular $y(2;1)$. Hallar, en el intervalo $[0,1]$, las soluciones de la ecuación $f(t) = 0$, siendo

$$f(t) = y''(t;1/2) + [y(t;1/2)]^2 + 3t^3.$$

   b) [**2 Puntos**] Calcular $y'''(2;1)$. Calcular el mínimo discreto de la función

$$g(t) = -\frac{1}{t} + \int_{-1}^{1} y'''(t;x)\ dx$$

   tomando 100 puntos en el intervalo $[1,2]$, así como el punto donde se alcanza.

Soluciones

1. *a*) Después de introducir las funciones obtenemos

$$\begin{aligned} x_{min} &= 1, \\ y_{min} &= 1.160804020100503, \\ h_{min} &= h(x_{min}, y_{min}) = 0.167375900071109 \end{aligned}$$

   b) El método no converge para las condiciones dadas, y el último valor obtenido es:

$$\begin{aligned} x_{100} &= 1.360696884859437, \\ y_{100} &= 1.003459391001899, \\ h(x_{100}, y_{100}) &= 0.054025550675437 \end{aligned}$$

2. *a*) El valor de $G'(1) \approx -0.528243832349058$.

   b) Tomando $h = 0{,}1$ y $tol = 10^{-3}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(1,2)}{\partial x} &= 6.332700051396801, \\ \frac{\partial f(1,2)}{\partial y} &= 1.452113111353955 \end{aligned}$$

   c) El valor aproximado es $\int_{0.5}^{1} \left(\int_{1}^{1.5} f(x,y)dy \right) dx \approx 0.279361350704628$

3. a) Para calcular los valores $y(t;x)$ hemos tomando $M = 20$ en el programa de Runge-Kutta de orden 4, con las modificaciones oportunas, para integrar el sistema de ecuaciones diferenciales obteniendose $y(2;1) \approx 2{,}408228523$.

   La gráfica de la función $f(t)$ en el intervalo $[0,1]$, tomando 100 puntos, es:

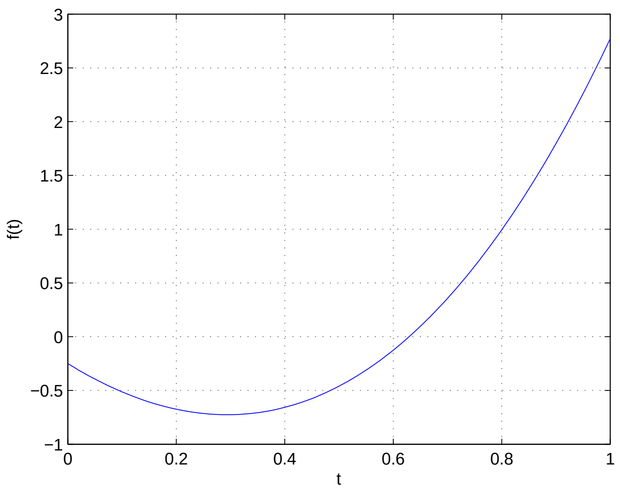

Figura 1: Gráfica de f(t)

Para calcular la raíz de $f(t)$ en $[0, 1]$ hemos utilizado el programa de la secante con $p_0 = 0{,}4$; $p_1 = 0{,}8$; $tolerancia = 10^{-10}$ y condición de parada $|p_k - p_{k-1}| < tolerancia$, obteniéndose:

`alcanzada la tolerancia en la iteración k=9, y la aproximación es:`

$$x \approx 0{,}6293680874.$$

b) Para obtener la derivada tercera de la solución $y(t; x)$, derivamos la ecuación diferencial respecto a la variable t y despejamos, resultando:

$$y''' = \frac{1}{3}[x^2 y'' - ty' - y].$$

Utilizando los programas del apartado anterior se obtiene $y'''(2; 1) \approx -1{,}957979827$.

Para calcular la integral usamos el esquema de Romberg a partir de la regla compuesta del trapecio con $h = 0{,}1$ y tolerancia 10^{-3}, con las modificaciones oportunas.

La gráfica de la función $g(t)$ en el intervalo $[1, 2]$ es:

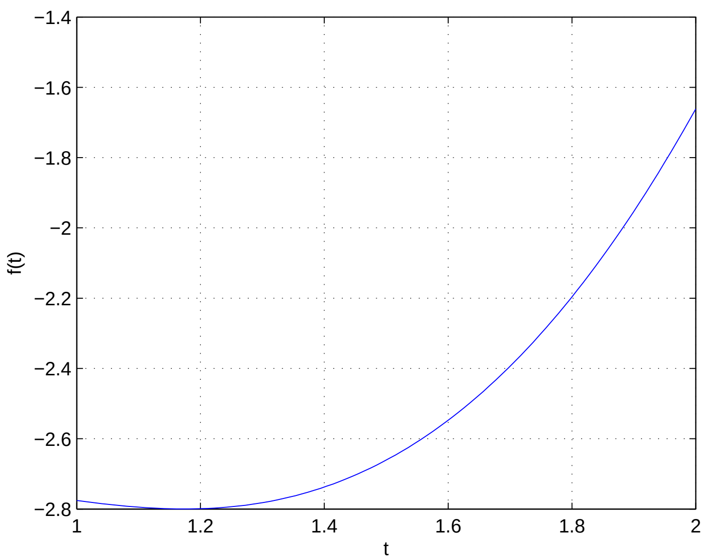

Figura 2: Gráfica de g(t)

Tomando 100 puntos en el intervalo considerado, y con las especificaciones indicadas, el mínimo discreto viene dado por $g(t) \approx -2{,}799849398676$, y lo alcanza en $t \approx 1{,}1717171717$.