Ejercicios Propuestos Tema 2

1. Programar la función:

$$f(x, A, X) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + ... + a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n),$$

   donde $A = [a_0, a_1, ..., a_n]$, $\quad X = [x_1, x_2, ..., x_n]$, $\quad$ con $x \in \mathbb{R}$.

   Calcular todas las raíces de dicha función para $x \in [0, 3]$, en el caso particular de ser $A = [1, 2, 3, 4, 5]$, $X = [0, 1, 2, 3]$.

2. Los problemas relacionados con la cantidad de dinero requerida para pagar una hipoteca en un periodo fijo de tiempo involucran la fórmula

$$A = \frac{P}{i}[1 - (1 + i)^{-n}].$$

   En esta ecuación, A es el importe de la hipoteca, P es el importe de cada pago e i es la tasa de interés por periodo, para los n periodos de pago. Supongamos que se necesita una hipoteca de 135000 euros para una casa, con un periodo de 30 años, y que los pagos máximos que puede realizar el cliente son de 1000 euros mensuales. ¿ Cuál será el interés más alto que podrá pagar? Utilizar el algoritmo de punto fijo y obtener las aproximaciones correspondientes a las iteraciones $5, 10, 15, ..., k$ donde k corresponde a la última iteración.

   Indicación: El interés x viene dado por $x = 1200i$.

3. Se pide:

   a) Hallar todas las raíces de la ecuación $x^3 - 7x + 2 = 0$. Realizar un análisis gráfico para calcular las aproximaciones iniciales necesarias en el método de la secante, tomando como criterio de paro $|p_n - p_{n-1}| < 10^{-7}$ y 100 como número máximo de iteraciones. Construye un gráfico que muestre la convergencia de las iteraciones a una de las raíces existentes.

   b) Siendo $F(p)$ la única raíz real de la ecuación $g_1(x; p) = x^3 - x^2 - p = 0$. Realizar un programa que, utilizando el método de Newton, calcule el vector $[F(1), F(1{,}4), F(1{,}8), F(2)]$ y las iteraciones necesarias para obtener cada una de ellas. Tomar $x_0 = 2$ y como criterio de paro $|p_k - p_{k-1}| < 10^{-5}$.

   c) Repetir el apartado anterior utilizando el algoritmo de Steffensen con las mismas especificaciones y la función $g_2(x; p) = x^3 - x^2 + x - p$.

4. Calcular el mínimo y el máximo discreto de la función

$$h(x,y) = (x+y-1)^2 + (2x-y-2)^2,$$

así como los puntos (x,y) donde se alcanzan dicho mínimo y máximo, cuando $x, y \in [0,1]$. Usar una malla de 10000 puntos.

5. Resolver el sistema $Ax = b$, cuadrado de orden 100, donde $A = (a_{ij})$, $b = (b_i)$ con $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j}$, $b_i = i^2 - 1$, e $i, j = 1, ..., 100$. Utilizar el método de Jacobi siendo el vector inicial el origen, tolerancia 10^{-15}, medida en la norma euclidea, y máximo número de iteraciones 100. Estudiar previamente la convergencia del método.

6. Consideremos el sistema de ecuaciones $Ax = b$, dado por

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

a) Resolverlo utilizando tanto el método de Jacobi como el de Gauss-Seidel con las siguientes especificaciones para ambos casos: el vector inicial es el origen, la tolerancia es 10^{-10}, medida en la norma euclidea, y el número máximo de iteraciones que se permite es 100. ¿ Convergen ambos métodos para las especificaciones dadas?

b) Estudiar la eficacia de ambos métodos obteniendo una gráfica donde se represente la tolerancia 10^{-i}, con $i = 1, 2, ..., 14$, frente al número de iteraciones necesarias para alcanzar esa tolerancia.

c) Encontrar el ω_{optimo} del método SOR para el sistema dado, en el sentido de que ω_{optimo} se corresponda con el mínimo valor de k para el que $||x^k - x^{k-1}||_2 <$ tolerancia. Tomar como vector inicial el origen, la tolerancia $= 10^{-10}$ y $k \leq 1000$. Dibujar k frente a $\omega \in (0,2)$, cuando $k > 1000$ o no converja el método para un cierto ω, tomar $k = 1000$. Hallar el mínimo discreto de $\rho(T_\omega)$ y comparar la gráfica anterior con la obtenida al representar $\rho(T_\omega)$ frente a ω.

d) Resolver el sistema dado mediante el método SOR para el ω_{optimo} obtenido en el apartado anterior con las especificaciones del apartado (a). Calcular las iteraciones 5, 10, ...

7. Sea el sistema de ecuaciones no lineal

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x,y) = xy - x - y + 1 = 0, \\ G(x,y) = 3x^2y - x^2 - 12xy + 4x + 12y - 4 = 0, \end{array} \right.$$

se pide:

a) Aplicar el método de Seidel con las siguientes especificaciones: el vector inicial es el origen, la tolerancia es 10^{-10}, medida en la norma infinito, y el número máximo de iteraciones que se permite es 100.

b) Aplicar el método de máximo descenso, partiendo de $P = [0,0]$ y $P = [-1,-1]$, hasta obtener aproximaciones que cumplan $h(x,y) = F^2(x,y) + G^2(x,y) < 10^{-1}$.

c) Con las aproximaciones obtenidas en el apartado (b) aplicar el método de Newton con criterio de paro $||P_n - P_{n-1}||_2 < 10^{-10}$. ¿ Qué respuestas obtienes?

8. Dado el sistema de ecuaciones no lineal:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x,y) = 3x + xy + y^3 = 0, \\ g(x,y) = 9x^2 + xy^3 + y^4 + y - 1 = 0. \end{array} \right.$$

a) Aplicar el algoritmo de punto fijo partiendo de $P = [0,0]$ con tolerancia 10^{-5}, medida en la norma euclidea, y el número máximo de iteraciones igual a 100, siendo la función de iteración $G(x,y) = \left(g_1(x,y) = \frac{-xy-y^3}{3}, \quad g_2(x,y) = -9x^2 - xy^3 - y^4 + 1\right)$.

b) Hallar el punto (x_0, y_0), con $x_0 = -10 + i, \quad y_0 = -10 + j$, e $i, j = 1, 2, ..., 20$, donde se alcanza el valor mínimo de la función $h(x,y) = f^2(x,y) + g^2(x,y)$.

c) Tomar el punto obtenido en el apartado (b) como punto inicial para aplicar el método de Newton con criterio de paro $h(x,y) \leq 10^{-10}$ ó número máximo de iteraciones igual a 50. ¿Converge? En caso afirmativo decir en cuantas iteraciones lo hace, y hallar las tres últimas aproximaciones calculadas, encontrando el valor de h en cada una de ellas.

d) Tomar el punto obtenido en el apartado (b) como punto inicial para aplicar el método de Broyden con tolerancia 10^{-10}, en la norma infinito, y número máximo de iteraciones igual a 50.

Soluciones

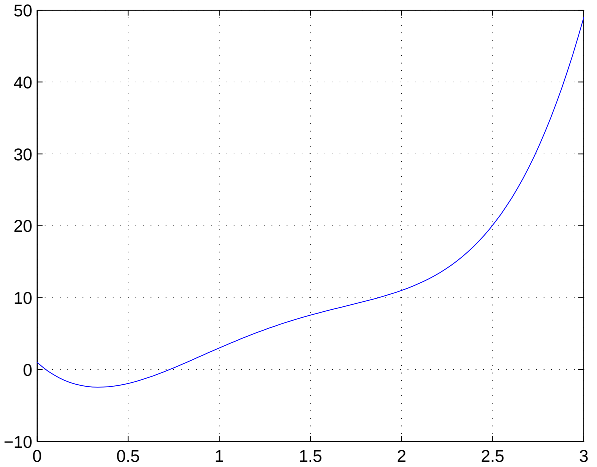

Figura 1: Gráfica de la función $y = f(x)$ del problema 1.

1. En la figura 1 se observa que hay dos raíces en el intervalo $[0, 3]$. Utilizando el algoritmo de bisección en los intervalos $[0, 0{,}5]$ y $[0{,}5, 1]$, y tolerancia 10^{-10} para la longitud del último intervalo se obtiene : $r_1 \approx 0{,}04795390772051$ y $r_2 \approx 0{,}72721331214416$.

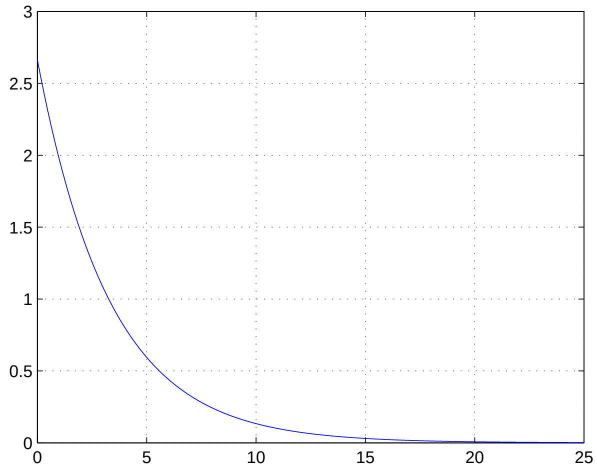

Figura 2: Gráfica de la función $y = |g'(x)|$ del problema 2.

2. En la figura 2 se observa que la gráfica de la función valor absoluto de la derivada de la función $g(x) = \frac{1200\times1000}{135000}[1-(1+\frac{x}{1200})^{-30\times12}]$ es menor que 1 en el intervalo $[5,25]$. Utilizando el algoritmo de punto fijo con la función g, condición inicial $p_0 = 1$, tolerancia 10^{-7} y condición de parada $f(p_k) = 135000 - \frac{1200\times1000}{p_k}[1-(1+\frac{p_k}{1200})^{-30\times12}] < tolerancia$ y $|p_k - p_{k-1}| < tolerancia$, el interés máximo que puede pagar es $x \approx 8{,}0999\,\%$ obtenido en la iteración $k = 22$. La matriz con las aproximaciones para $k = 5, 10, 15, 20, 22$ en la primera columna, el valor de $f(p_k)$ en la segunda, así como la diferencia $p_k - p_{k-1}$ en la tercera es:

$$\begin{pmatrix} 7{,}98108249399 & -1528{,}79407496 & 0{,}35184526669 \\ 8{,}09981321825 & -1{,}11386278889 & 0{,}00028423198 \\ 8{,}09990052812 & -0{,}00080017894 & 0{,}00000020420 \\ 8{,}09990059084 & -0{,}00000057530 & 0{,}00000000015 \\ 8{,}09990059088 & -0{,}00000003132 & 0{,}00000000000 \end{pmatrix}.$$

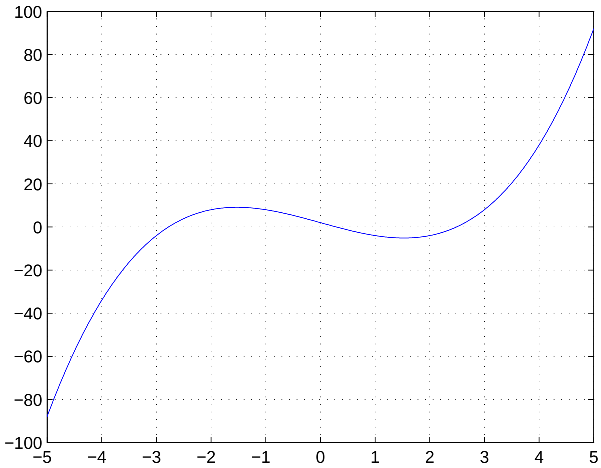

Figura 3: Gráfica de la función $y = f(x)$ del problema 3a.

3. a) Observando la figura 3 tomamos $p_0 = -3$ obteniéndose, en la iteración 8, la raíz $r_1 \approx -2{,}77845711825839$. Para la elección $p_0 = 0$ se obtiene, en la iteración 7, $r_2 \approx 0{,}28916854644787$ y finalmente si $p_0 = 3$ obtenemos, en la iteración 9, $r_3 \approx 2{,}48928857181016$.

   b) El vector con las aproximaciones de las raíces es:
   $[1{,}46557123187679, \quad 1{,}56882527131585, \quad 1{,}65620903538834, \quad 1{,}69562076957059]$,
   y las iteraciones necesarias para obtener cada una de ellas son: $[5, 5, 5, 4]$.

   c) El vector con las aproximaciones de las raíces es:
   $[1{,}46557123191001, \quad 1{,}56882527154556, \quad 1{,}65620903538834, \quad 1{,}69562076958491]$,
   y las iteraciones necesarias para obtener cada una de ellas son: $[9, 8, 8, 7]$.

4. El mínimo discreto de la función $h(x, y)$, se obtiene en el punto $(1, 0)$ y su valor es 0. El máximo dicreto lo alcanza en el punto $(0, 1)$ y su valor es 9.

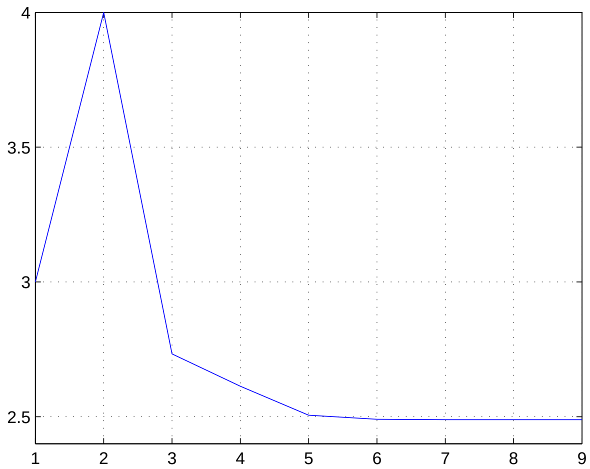

Figura 4: Evolución de las 9 primeras iteraciones para la raíz r_3 del problema3a.

5. La sucesión generada por el método de Jacobi no converge a la solución, ya que el radio espectral de la matriz del método es 86,75777558.

   Si bajamos el orden a 2, es decir $i, j = 1, 2$, entonces el método de Jacobi converge para este nuevo sistema, ya que el radio espectral es 0,94280904, obteniendose como solución: $[-72, \quad 108]$.

6. a) Con las especificaciones dadas, el método de Jacobi no converge. Con el método de Gauss-Seidel si hay convergencia, obteniendose en la iteración 17:

$$\begin{pmatrix} 0{,}70499911675086 \\ 1{,}67234092056811 \\ -0{,}98825080461501 \\ 0{,}98177517546556 \\ -0{,}23773701965394 \\ 1{,}67028578075603 \\ 0{,}25770677421194 \\ -1{,}40611199434835 \end{pmatrix}.$$

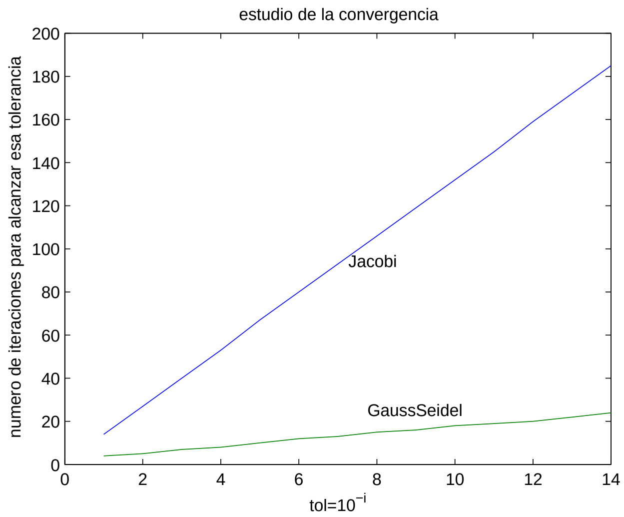

Figura 5: Gráfica del problema 6 apartado (b).

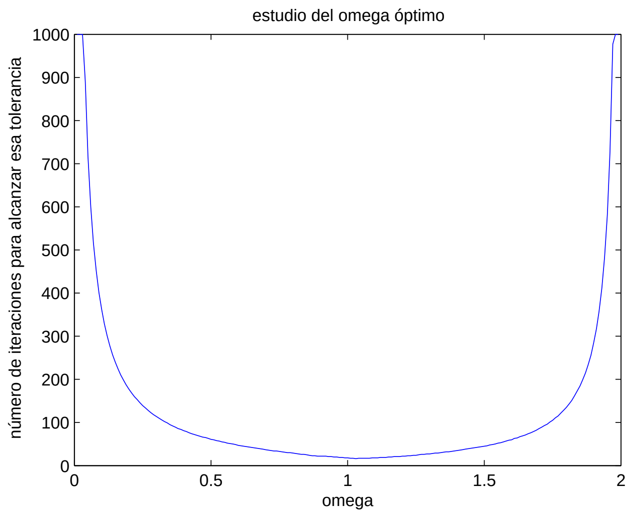

Figura 6: Primera gráfica del problema 6 apartado (c).

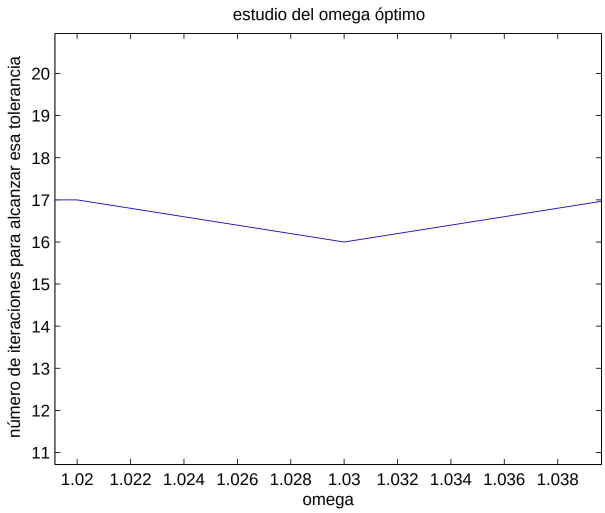

Figura 7: Zoom de la primera gráfica del problema 6 apartado (c).

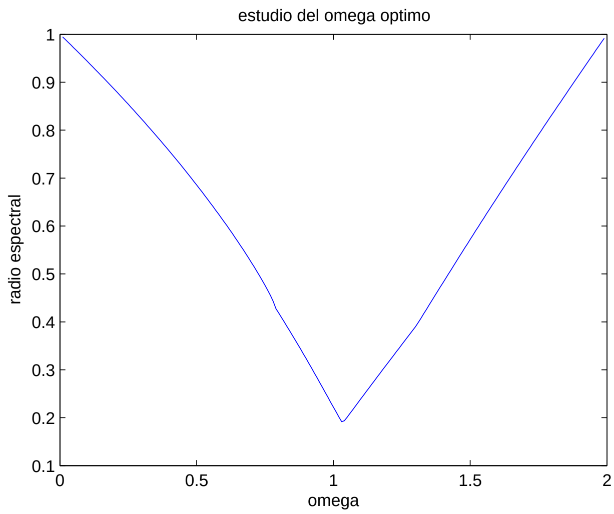

Figura 8: Segunda gráfica del problema 6 apartado (c).

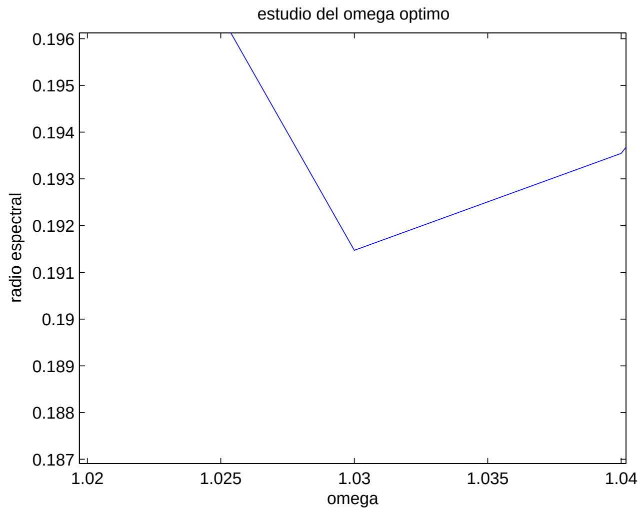

Figura 9: Zoom de la segunda gráfica del problema 6 apartado (c).

El $\omega_{optimo} \approx 1{,}03$, se corresponde con $k = 16$ iteraciones.
El mínimo discreto de $\rho(T_\omega) \approx 0{,}1914729277$ se obtiene para $\omega_{optimo} \approx 1{,}03$.

d) Para $\omega = 1{,}03$, el método SOR da como aproximación a la solución en la iteración 16:

$$\begin{pmatrix} 0{,}70499911676823 \\ 1{,}67234092053369 \\ -0{,}98825080460557 \\ 0{,}98177517545630 \\ -0{,}23773701965450 \\ 1{,}67028578075220 \\ 0{,}25770677420430 \\ -1{,}40611199434565 \end{pmatrix}.$$

La matriz con las iteraciones 5,10 y 15 es:

$$\begin{pmatrix} 5{,}00000000000000 & 10{,}00000000000000 & 15{,}00000000000000 \\ 0{,}70520057890389 & 0{,}70499891042941 & 0{,}70499911672859 \\ 1{,}67104095096625 & 1{,}67234102587039 & 1{,}67234092046753 \\ -0{,}98828747605606 & -0{,}98825103602589 & -0{,}98825080455592 \\ 0{,}98249314791357 & 0{,}98177540496771 & 0{,}98177517545394 \\ -0{,}23838746894696 & -0{,}23773711890423 & -0{,}23773701964823 \\ 1{,}67009603271334 & 1{,}67028572470848 & 1{,}67028578073209 \\ 0{,}25757572587607 & 0{,}25770684435928 & 0{,}25770677421918 \\ -1{,}40598190080799 & -1{,}40611197279274 & -1{,}40611199433937 \end{pmatrix}.$$

7. a) Utilizando como función de iteración

$$S(x,y) = \left(g_1(x,y) = xy - y + 1, \quad g_2(x,y) = -\frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{12}x^2 + xy - \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \right),$$

el método de Seidel converge, con las especificaciones dadas, en la iteración 73 y la aproximación obtenida es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1{,}00000000000000 \\ 0{,}33333333308078 \end{pmatrix}.$$

b) Con $P = [0,0]$ y tomando $\alpha = 1$ en el método de máximo descenso, la aproximación obtenida en la iteración 14 es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}96501683696697 \\ 0{,}40415353559737 \end{pmatrix}.$$

Con $P = [-1,-1]$ y tomando $\alpha = 1$ en el método de máximo descenso, la aproximación obtenida en la iteración 8 es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1{,}819367683343213 \\ 0{,}896010332232760 \end{pmatrix}.$$

c) Con $P = [0{,}9, 0{,}4]$, mediante el método de Newton se consigue la tolerancia exigida en la iteración 5:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1{,}00000000000000 \\ 0{,}33333333333333 \end{pmatrix}.$$

Con $P = [1{,}8, 0{,}9]$, mediante el método de Newton se consigue la tolerancia exigida en la iteración 39:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2{,}00000000125992 \\ 1{,}00000000000000 \end{pmatrix}.$$

8. a) El método de punto fijo no converge con las especificaciones dadas.

b) El punto donde se alcanza el mínimo es $(x_0, y_0) = (0,0)$, siendo $h(0,0) = 1$.

c) Si converge con las especificaciones dadas en la iteración 5 y las tres últimas aproximaciones y el valor de h en cada una de ellas son:

$$\begin{pmatrix} \textit{iteracion} \\ x \\ y \\ h(x,y) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3{,}00000000000000 & 4{,}00000000000000 & 5{,}00000000000000 \\ -0{,}09473975920591 & -0{,}09463792103603 & -0{,}09465788363288 \\ 0{,}72113892298610 & 0{,}70553809724951 & 0{,}70521838437809 \\ 0{,}00186212320267 & 0{,}00000075696059 & 0{,}00000000000014 \end{pmatrix}.$$

d) Utilizando el método de Broyden converge, con las especificaciones dadas, en la iteración 12 y la última aproximación es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0{,}09465789215212 \\ 0{,}70521824759221 \end{pmatrix}.$$