Ejercicios Tema 5: Diferenciación e Integración Numérica.

1. Dado el sistema de ecuaciones,

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x,y) = \int_0^1 sen(t^2+y^2)dt + 2xy^2 - \int_0^1 cos^2(t)dt = 0, \\ G(x,y) = 2xy^3 - 2x^4y - x + 1 = 0, \end{array} \right.$$

se pide:

a) Aplicar máximo descenso con $P = (1,0)$, con criterio de paro $g(x,y) = F^2(x,y) + G^2(x,y) \leq 10^{-6}$ ó número máximo de iteraciones igual a 50. ¿Converge con dichas especificaciones?. ¿Y tomando $P = (0{,}5, 0)$.?

b) Tomar el punto obtenido en el apartado (a) como punto inicial para aplicar el método de Newton con criterio de paro $g(x,y) = F^2(x,y) + G^2(x,y) \leq 10^{-15}$ ó número máximo de iteraciones igual a 50. ¿Converge?. En caso afirmativo decir en cuantas iteraciones lo hace, y la última aproximación.

c) Calcular todas las raíces de $G(x,1)$. Localizar las raíces con un gráfico de la función y utilizar posteriormente el método de biseccción para encontrar aproximaciones con tolerancia 10^{-8} indicando el número de iteraciones.

2. Sea

$$F(x) = \int_0^{x^2} t^2 sen(t^2)dt,$$

se pide:

a) Calcular

$$I = \int_0^1 F(x)dx.$$

Usar el esquema de Romberg con $h = 0{,}1$ y tolerancia $= 10^{-3}$.

b) Calcular $F'(0)$, $F'(1)$ y $F''(0{,}3)$ usando alguna fórmula con extrapolación con tolerancia 10^{-6} y para calcular $F(x)$ utilizar Romberg con $h = 0{,}1$ y tolerancia $= 10^{-8}$. Utilizando la regla de Leibniz:

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x),$$

se obtiene $F'(x) = 2x^5 \operatorname{sen}(x^4)$ y por tanto $F''(x) = 2x^4[5\operatorname{sen}(x^4) + 4x^4\cos(x^4)]$. Contrastar los resultados obtenidos.

c) Rehacer los cálculos de los apartados (a) y (b) usando para calcular $F(x)$ cinco nodos de Chebyshev en $[0,1]$ e interpolar la tabla obtenida.

d) Rehacer los cálculos de los apartados (a) y (b) usando para calcular $F(x)$ cinco nodos de Chebyshev en $[0,1]$ y a partir de dicha tabla construir el spline sujeto, utilizar los valores $F'(0)$ y $F'(1)$ calculados previamente en el apartado (b).

3. Sea $F(p,q)$ la única raíz real de la ecuación $x^3+2px+q^2=0$, para $p>0$, $q\in\mathbb{R}$, se pide:

a) Calcular

$$F_p(1,1)=\frac{\partial F}{\partial p}(1,1) \qquad y \qquad F_q(1,1)=\frac{\partial F}{\partial q}(1,1)$$

b) Calcular

$$I=\int_1^3\left[\int_1^2 F(p,q)dq\right]dp.$$

c) Calcular las soluciones del sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} F(p,q)=0,\\ G(p,q)=p^5+pq^3-1=0,\end{array}\right.$$

donde $p\in[1,2]$ y $q\in[1,2]$.
Usar una malla de 400 puntos para predecir y Newton para corregir.

Soluciones

1. **a)** Para calcular la matriz jacobiana del sistema dado se ha utilizado la regla:

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(\lambda,x)dx=\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)}\frac{\partial f(\lambda,x)}{\partial\lambda}dx+f(\lambda,b(\lambda))\frac{db(\lambda)}{d\lambda}-f(\lambda,a(\lambda))\frac{da(\lambda)}{d\lambda}.$$

Tomando $h=0{,}1$ y tolerancia $=10^{-6}$ cada vez que se llama a Romberg, máximo descenso no converge con las especificaciones dadas porque el gradiente en $P=(1,0)$ es el vector nulo.
Si partimos de $P=(0{,}5,0)$ se alcanza la tolerancia en la iteración $k=14$, siendo la aproximación:

$$\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} 0{,}78993718294159\\ 0{,}41181140875490\end{pmatrix}.$$

b) Newton, con las especificaciones fijadas, converge en la iteración 19 y la aproximación es:

$$\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} 0{,}78982115936477\\ 0{,}41229045417582\end{pmatrix}.$$

c) El gráfico de la función $G(x,1)$ en el intervalo $[-1,1{,}5]$ se muestra en la figura 1
Mediante el método de bisección, en el intervalo $[-1,-0{,}5]$ con tolerancia $=10^{-8}$, se obtiene como aproximación a la menor de las raíces en la iteración $k=27$, $r_1\approx-0{,}64779886975884$. La otra raíz, en el intervalo $[0{,}5,1]$ con tolerancia $=10^{-8}$, se obtiene en la iteración $k=27$ siendo $r_2\approx 0{,}99999999627471$

2. **a)** Con las especificaciones $h=0{,}1$ y tolerancia $=10^{-5}$ para calcular $F(x)$ se obtiene como resultado:

$$I\approx 0{,}01723056655735.$$

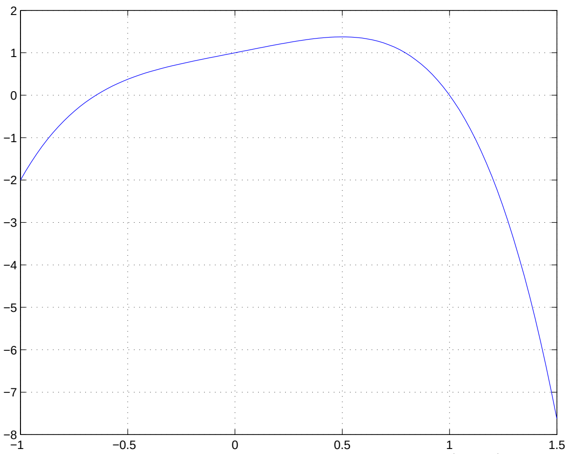

Figura 1: Gráfico de la función $G(x, 1)$.

b) Como $F(x)$ es derivable y simétrica respecto al eje $x = 0$ ya sabemos que $F'(0) = 0$ y éste es el valor que nos aparece al aplicar el esquema de Richardson. Para $F'(1)$ obtenemos el esquema triangular

1.78069280169731	0	0	0
1.70872408351133	1.68473451078266	0	0
1.68946937343354	1.68305113674095	1.68293891180483	0
1.68457890214177	1.68294874504451	1.68294191893142	1.68294196666359

En consecuencia $F'(1) \approx 1{,}68294196666359$. El valor obtenido por la fórmula de Leibnitz es muy similar $F'(1) \approx 1{,}68294196961579$

En cuanto a $F''(0{,}3)$ utilizamos el esquema de Richardson con primera columna la fórmula centrada de tres puntos para la derivada segunda. $f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$.

La matriz con las aproximaciones a la derivada segunda, usando el esquema de Richardson es:

0.00186288592838	0	0	0
0.00133831301837	0.00116345538169	0	0
0.00121949582923	0.00117989009952	0.00118098574737	0
0.00119054445160	0.00118089399240	0.00118096091859	0.00118096052448

En consecuencia $F''(0{,}3) \approx 0{,}00118096052448$. El valor obtenido por la fórmula de Leibnitz es $F''(0{,}3) \approx 0{,}00118095560698$

c) En el gráfico 2 aparecen dibujada la función $F(x)$ y su polinomio interpolador con 5 nodos de Chebyshev.

Con las mismas especificaciones del apartado (a) se obtiene ahora:

$$I \approx 0{,}01734004549490$$

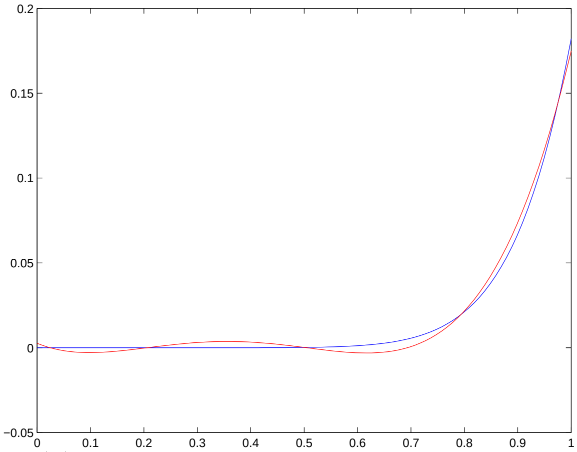

Figura 2: Gráfico de la función $F(x)$ en azul y de su polinomio de interpolacion con 5 nodos de Chebyshev en rojo.

El esquema de Richardson para $F'(0)$ es

-0.15004162067444	0	0
-0.13412585232648	-0.12882059621049	0
-0.13014691023949	-0.12882059621049	-0.12882059621049

Por tanto $F'(0) \approx -0{,}12882059621049$
Para $F'(1)$ es

1.36081153590524	0	0
1.33215793038031	1.32260672853866	0
1.32499452899907	1.32260672853866	1.32260672853866

Por tanto $F'(1) \approx 1{,}32260672853866$
La matriz con las aproximaciones a la derivada segunda, usando el esquema de Richardson es:

-0.31042254729020	0	0
-0.33270723422665	-0.34013546320546	0
-0.33827840596074	-0.34013546320544	-0.34013546320543

En consecuencia

$$F''(0{,}3) \approx -0{,}34013546320543.$$

Utilizando la regla de Leibnitz obteníamos $F''(0{,}3) \approx 0{,}00118095560698$
Notar que se comete un error grande cuando utilizamos el polinomio interpolador para calcular $F''(0{,}3)$. Para comprobar esto hacemos un dibujo, ver figuras 2 y 2, de las funciones $P''(x)$ y $F''(x)$, donde $P(x)$ es el polinomio interpolador construido a partir de la tabla, y las comparamos en x =0.3

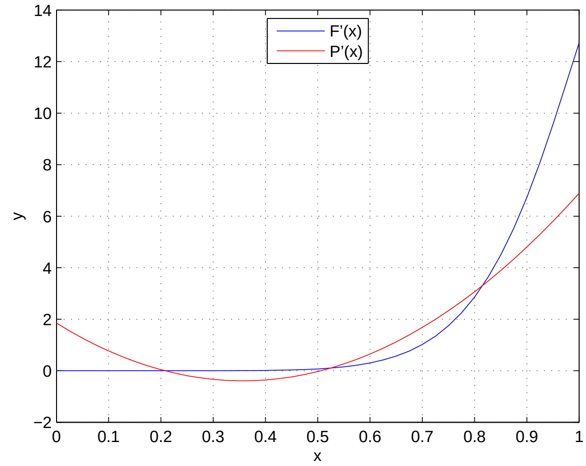

Figura 3: Gráfica de las funciones F”(x) y P”(x).

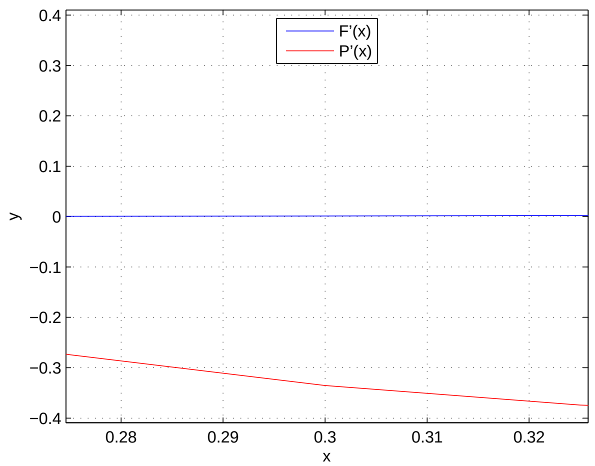

Figura 4: Zum de la gráfica anterior.

d) En el gráfico 2 aparecen dibujada la función $F(x)$ y su spline con 5 nodos de Chebyshev. Con las mismas especificaciones del apartado (a) se obtiene ahora:

$$I \approx 0{,}01661374838629$$

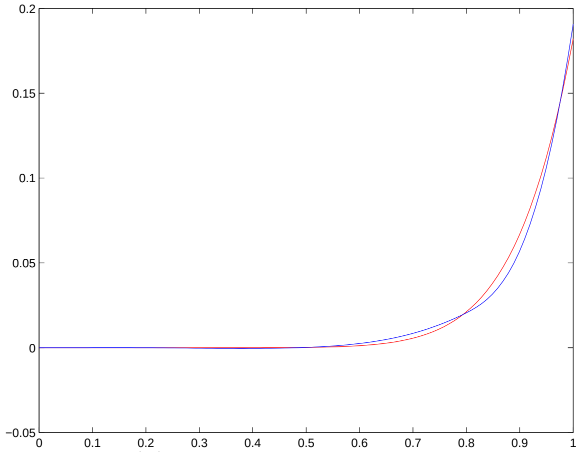

Figura 5: Gráfico de la función $F(x)$ en azul y de su spline con 5 nodos de Chebyshev en rojo.

El esquema de Richardson para $F'(0)$ es

-0.00121876571260	0	0
-0.00077691019005	-0.00062962501586	0
-0.00066644630941	-0.00062962501586	-0.00062962501586

Por tanto $F'(0) \approx -0{,}00062962501586$
Para $F'(1)$ es

2.23950284154092	0	0
2.13490867488581	2.10004395266744	0
2.10876013322202	2.10004395266743	2.10004395266743

Por tanto $F'(1) \approx 2{,}10004395266743$
La matriz con las aproximaciones a la derivada segunda, usando el esquema de Richardson es:

0.01523247644607	0
0.01522878775637	0.01522755819314

En consecuencia $F''(0{,}3) \approx 0{,}01522755819314$. Este valor es mucho más aproximado que el obtenido por el polinomio interpolador del apartado (c)

A continuación mostramos un cuadro con los diferentes valores obtenidos

	exacto	Métodos numéricos utilizando $F(x)$	polinomio interpolador nodos de Chebyschev	spline cúbico nodos de Chebyschev
I		0.01723056655735	0.01734004549490	0.01661374838629
$F'(0)$	0	0	-0.12882059621049	-0.00062962501586
$F'(1)$	1.68294196961579	1.68294196666359	1.32260672853866	2.10004395266743
$F''(0{,}3)$	0.00118095560698	0.00118096052448	-0.34013546320543	0.01522755819314

3. **a)** Tomando incremento inicial $h = 0{,}1$ y como aproximación a la derivada el elemento que ocupa la posición $(3,3)$ en la matriz de Richardson, si utilizamos el método de la secante con las especificaciones $p0 = 0, p1 = 1, tol = 10^{-8}$, máximo de iteraciones= 100, el resultado obtenido para $F_p(1,1)$ es:

0.34719456397734	0	0
0.34670489315774	0.34654166955121	0
0.34658162723578	0.34654053859513	0.34654046319806

Y por tanto $F_p(1,1) \approx 0{,}34654046319806$ y para $F_q(1,1)$ obtenemos:

-0.76199569897118	0	0
-0.76373695210127	-0.76431736981130	0
-0.76417344839487	-0.76431894715940	-0.76431905231594

De donde resulta $F_q(1,1) \approx -0{,}76431905231594$.

b) La aproximación a la integral, usando el esquema de Romberg a partir de la regla compuesta del trapecio con $h = 0{,}1$ y tolerancia 10^{-3}, es:

$$I \approx -1{,}11189636770285.$$

c) Usando una malla de 400 puntos, el mínimo de la función $h(p,q) = F^2(p,q) + G^2(p,q)$, se obtiene en $P = (1,1)$. Con este punto inicial el método de Newton, con tolerancia $= 10^{-5}$ en la norma infinito, converge en la iteración 17, obteniendose:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1{,}00000000000000 \\ 0{,}00000622141795 \end{pmatrix}.$$