Ejercicios Temas 3 y 4: Interpolación polinomial. Ajuste de curvas.

1. El número de personas afectadas por el virus contagioso que produce la gripe en una determinada población viene dado por la siguiente función, donde t indica el tiempo en días:

$$f(t) = \frac{100}{2 + 999e^{-2,1t}}$$

   a) Aproxima esta función en $[0, 7]$ por polinomios de interpolación de grados $4, 6$ y 8, tomando nodos equiespaciados. Representa la función junto al polinomio para comprobar que en los extremos del intervalo el error es considerable.

   b) Calcula los polinomios de interpolación, tomando nodos de Chebyshev, de grados $4, 6$ y 8.

2. Consideramos la función $f(x) = \cos^{10}(x)$ en $[-2, 2]$.

   a) Ajusta polinomios de grado $2, 4, 6, 7$ y 8 que coincidan con $f(x)$ en puntos equidistantes en el intervalo dado. Representa la función junto a los polinomios de interpolación y extrae conclusiones sobre la bondad de las aproximaciones.

   b) Mejora la aproximación utilizando un spline cúbico sujeto considerando 8 subintervalos.

   c) ¿Cuál es el valor aproximado de la función en $x = 1{,}25$ con cada una de las aproximaciones halladas tomando 8 subintervalos?. ¿Cuál es el error cometido en cada caso?.

3. **a)** Calcular 30 puntos de la función $f(x) = x^7 - x^6 + 2x^3 - 1$, con abscisas igualmente espaciadas en $[-2, 2]$. Encontrar la mejor aproximación, en el sentido de los mínimos cuadrados, a la tabla calculada dentro del espacio vectorial

$$S =< 1, cos(x), sen(x), ..., cos(5x), sen(5x) > .$$

   b) Calcular el

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - \phi(x)|,$$

   siendo $\phi(x)$ la función calculada en el apartado (a), así como el error cuadrático de la aproximación realizada en (a).

4. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 - x & \text{si} \quad x \in (-1, 0), \\ \quad 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ 1 - x & \text{si} \quad x \in (0, 1). \end{cases}$$

   construir una tabla de 50 puntos de dicha función. Hallar la mejor aproximación a dicha tabla, en el sentido de los mínimos cuadrados, en el espacio vectorial

$$S =< sen(\pi x), sen(2\pi x), ..., sen(10\pi x) > .$$

   ¿ Puedes dar alguna medida de la aproximación efectuada?.

Soluciones

1. **a)** Los coeficientes en orden descendente de los polinomios p_4, p_6 y p_8 son respectivamente:

p_4	0,2851	−4,6439	23,2702	−25,9945	0,0999				
p_6	−0,0685	1,5250	−12,7151	47,8820	−75,7373	41,5874	0,0999		
p_8	0,0140	−0,4016	4,6858	−28,4646	95,4349	−172,9769	157,3026	−54,0860	0,0999

El gráfico de los polinomios $p_4(x)$ y $p_6(x)$ aparece representado en la figura 1 y el del polinomio de grado 8 en la figura 2

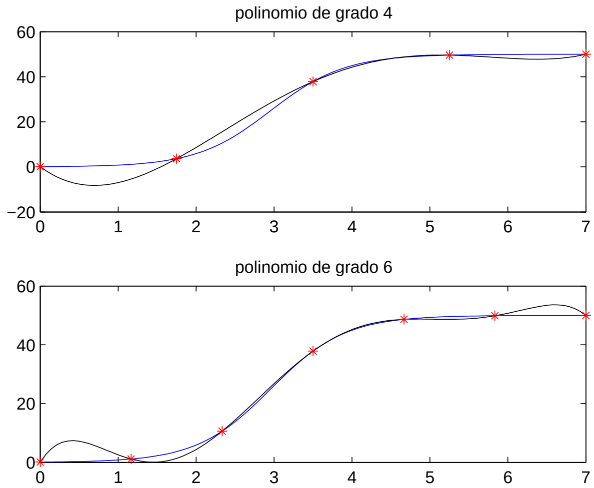

Figura 1: función $f(x)$ en azul, polinomios interpoladores $p(x)$ en negro y los nodos en rojo.

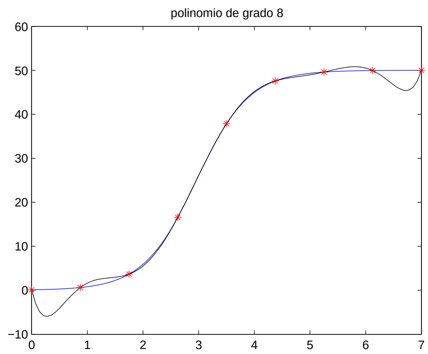

Figura 2: función $f(x)$ en azul, polinomio interpolador $p_8(x)$ en negro y los nodos en rojo.

b) Los coeficientes en orden descendente de los polinomios interpoladores con nodos de Chebyschev q_4, q_6 y q_8 son respectivamente:

q_4	0,2442	$-4{,}0224$	20,4242	$-22{,}8610$	3,4798				
q_6	$-0{,}0426$	0,9603	$-8{,}0213$	29,5174	$-42{,}6614$	21,1328	$-1{,}4253$		
q_8	0,0068	$-0{,}1977$	2,3061	$-13{,}7338$	43,5936	$-70{,}4505$	53,8295	$-14{,}6611$	0,7493

El gráfico de los polinomios $q_4(x)$ y $q_6(x)$ aparece representado en la figura 3 y el del polinomio de grado 8 en la figura 4

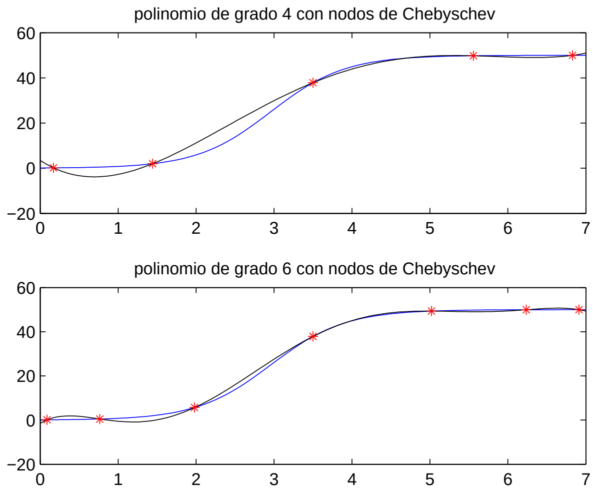

Figura 3: función $f(x)$ en azul, polinomios interpoladores con nodos de Chebyschev $q(x)$ en negro y los nodos en rojo.

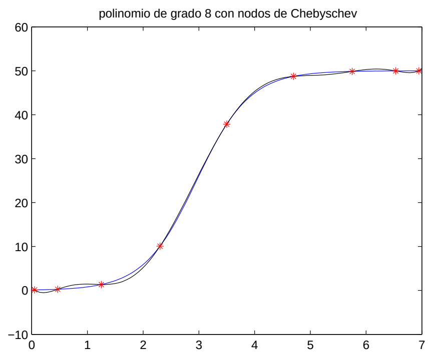

Figura 4: función $f(x)$ en azul, polinomio interpolador con nodos de Chebyschev $q_8(x)$ en negro y los nodos en rojo.

2. **a)** Los coeficientes en orden descendente de los polinomios p_2, p_4, p_6, p_7, p_8 son respectivamente

p_2	$-0{,}2500$	0	1,0000						
p_4	0,2493	0,0000	$-1{,}2472$	0,0000	1,0000				
p_6	$-0{,}2737$	0,0000	1,7223	$-0{,}0000$	$-2{,}7592$	0,0000	1,0000		
p_7	0,0000	$-0{,}1267$	$-0{,}0000$	0,8617	0,0000	$-1{,}6168$	0,0000	0,7874	
p_8	0,2525	0,0000	$-1{,}9414$	$-0{,}0000$	4,6531	0,0000	$-3{,}9621$	$-0{,}0000$	1,0000

El gráfico de los polinomios $p_2(x), p_4(x), p_6(x)$ y $p_7(x)$ aparece representado en la figura 5 y el del polinomio de grado 8 en la figura 6 como se puede apreciar no son muy buenas aproximaciones.

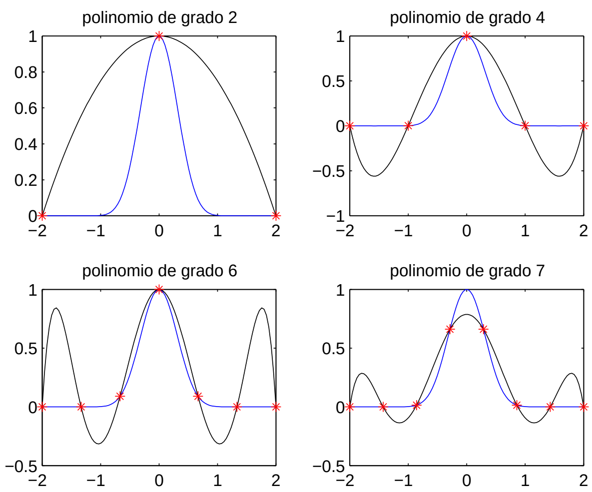

Figura 5: función $f(x)$ en azul, polinomios interpoladores $p(x)$ en negro y los nodos en rojo.

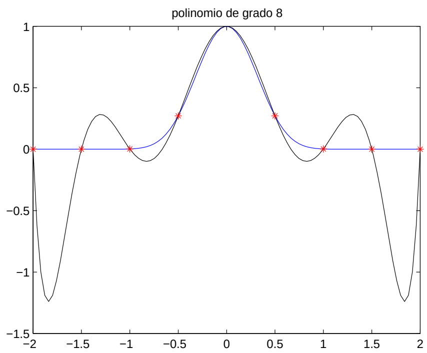

Figura 6: función $f(x)$ en azul, polinomio interpolador $p_8(x)$ en negro y los nodos en rojo.

b) El gráfico del spline cúbico sujeto para 8 subintervalos aparece representado en la figura 7.

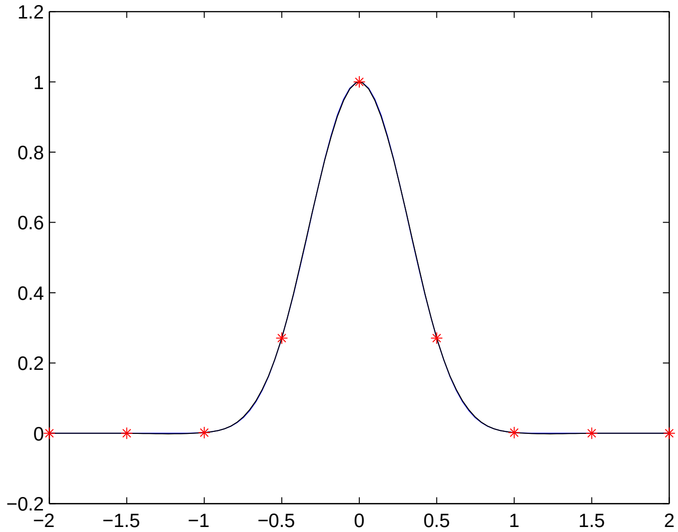

Figura 7: función $f(x)$ en azul, spline sujeto $S(x)$ en negro y los nodos en rojo.

c) Las aproximaciones obtenidas son: $p_8(1{,}25) = 0{,}2687$, $S(1{,}25) = -0{,}0015$ y los errores $|f(1{,}25) - p_8(1{,}25)| = 0{,}2687$ y $|f(1{,}25) - S(1{,}25)| = 0{,}0015$.

3. **a)** El vector con los coeficientes de la combinación lineal es:

$$X \approx \begin{pmatrix} -87{,}459252797316 \\ 142{,}419955516794 \\ 1{,}193552808982 \\ -79{,}783830332793 \\ -147{,}053947494606 \\ 30{,}781014752288 \\ 99{,}959502279013 \\ -8{,}292650703335 \\ -43{,}433729485067 \\ 1{,}376793175394 \\ 10{,}722747021206 \end{pmatrix}.$$

b) Con 500 puntos elegidos en el intervalo $[-1, 1]$ se obtiene

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - \phi(x)| \approx 0{,}83421556519763.$$

El error cuadrático de la aproximación realizada en (a) es:

$$error \approx 4{,}42514012890533.$$

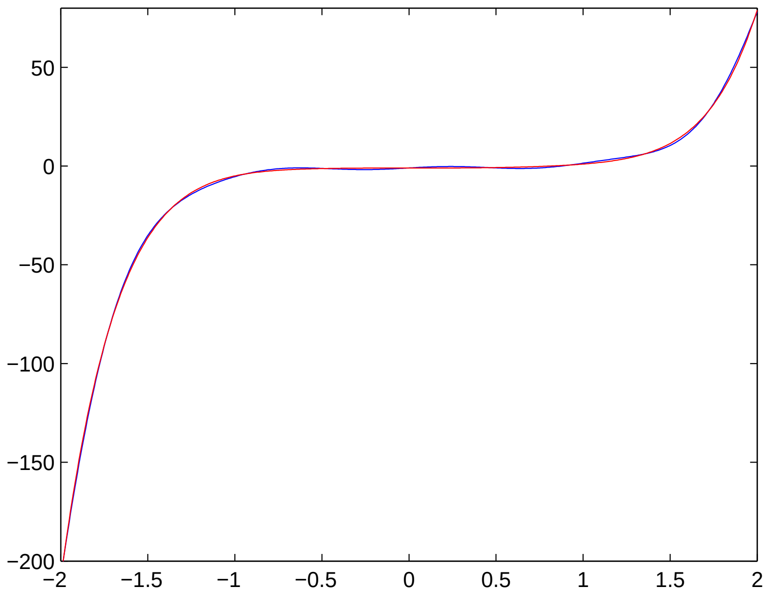

Figura 8: Gráfica de la función f(x) (color rojo) y de la aproximación (color azul), en mínimos cuadrados, en el intervalo [-2,2].

4. El vector con los coeficientes de la combinación lineal es:

$$X \approx \begin{pmatrix} 0{,}63702256411212 \\ 0{,}31911654122934 \\ 0{,}21341926085301 \\ 0{,}16077687740192 \\ 0{,}12935952615047 \\ 0{,}10855803730623 \\ 0{,}09382633246016 \\ 0{,}08289203204706 \\ 0{,}07449333274047 \\ 0{,}06787376676255 \end{pmatrix}.$$

Una medida de la aproximación efectuada viene dada por el error cuadrático:

$$error \approx 0{,}91776311888983.$$

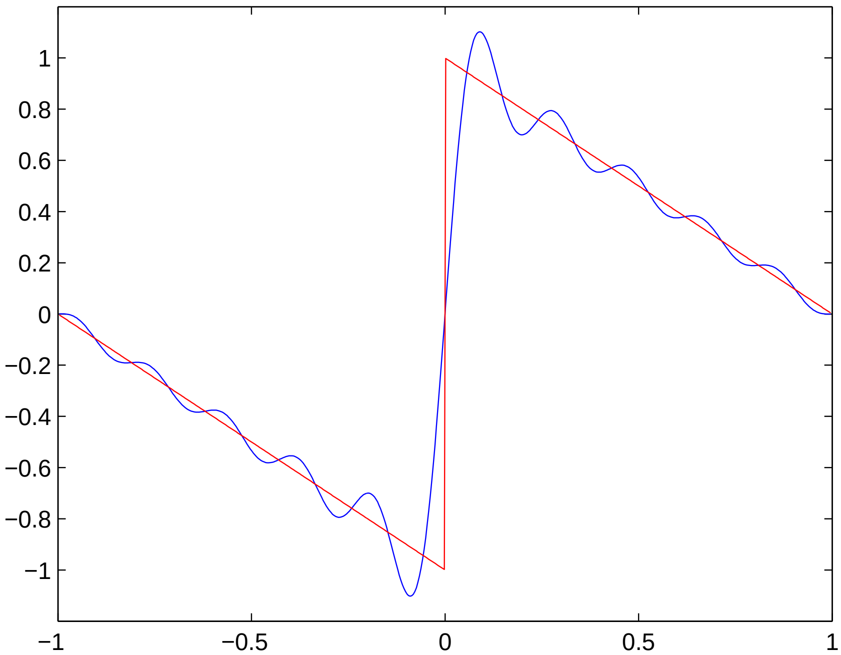

Figura 9: Gráfica de la función f(x) (color rojo) y de la aproximación (color azul), en mínimos cuadrados, en el intervalo (-1,1).