Ejercicios Temas 6 y 7: Problemas de valor inicial y de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias.

1. Si denotamos por $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ los niveles de inventario, expresados en cientos de miles de unidades, correspondientes a tres centros de producción situados en tres ciudades distintas de una misma empresa, y sabemos que sus niveles de inventario se modifican de acuerdo al siguiente sistema

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

   si $x(0) = (0{,}5, 0{,}4, 0{,}2)$ determinar los niveles de inventario de cada empresa en $t = 1$.

2. Considera el problema de valor inicial

$$t^3y''' - t^2y'' + 3ty' - 4y = 5t^3ln(t) + 9t^3, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = 3.$$

   Calcular y e y''', en el intervalo $[1, 2]$, mediante:

   a) El método de Euler, con tamaño de paso $h = 0{,}1$, así como el error cometido. La solución del problema dado es $y(t) = -t^2 + t\ cos(ln(t)) + t\ sen(ln(t)) + t^3\ ln(t)$.
   b) El método de Runge-Kutta clásico de orden cuatro, con tamaño de paso $h = 0{,}1$, así como el error cometido.
   c) El comando ode45 de Matlab, así como el error cometido.

3. Sea el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' - ty' - y + 2t + 1 = 0, \\ y(0) = 1,\ y(2) = x, \end{cases}$$

   se pide:

   a) Sabiendo que $x = 2$, calcular $y''(0{,}7)$.
   b) Calcular $x \in [1, 5]$ tal que $y'''(2) + y(2) = 3$.

4. Sea el problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} y''' = t^3(y'')^2 + (y')^3 - 1, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0, \end{array} \right.$$

se pide:

a) Calcular todas las raíces de la ecuación

$$t^2 y'''(t) + y(t) = 0,$$

para $t \in [-2, 2]$.

b) Calcular

$$I = \int_0^1 [y(t)^2 + y'(t)^2 + y''(t)^2] dt.$$

5. Sea $y(t; x, z)$ la solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' = 2ty' + y - t^2, \\ y(0) = x,\ y(1) = z^2 - 1, \end{array} \right.$$

donde $x, z \in R$, se pide:

a) Resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} y\left(\frac{1}{2}; x, z\right) - y\left(\frac{2}{3}; x, z\right) = 0, \\ \\ y\left(\frac{1}{4}; x, z\right) = 0. \end{array} \right.$$

Usar máximo descenso con número máximo de iteraciones = 100, tolerancia = 10^{-2}, $x_0 = 1,\ z_0 = 2$.

b) Calcular

$$I = \int_0^1 \left[\int_1^2 \left| (y\left(\frac{1}{2}; x, z\right) - y'\left(\frac{1}{2}; x, z\right) \right| dx \right] dz,$$

y

$$\max_{x \in [0,1]} \left[\min_{z \in [1,2]} y\left(\frac{2}{3}; x, z\right) \right].$$

c) Calcular $z \in [0, 3]$ tal que

$$y''\left(\frac{1}{2}; 2, z\right) = y\left(\frac{1}{2}; 2, z\right).$$

Soluciones

1. Usando el método de Runge-Kutta clásico de orden cuatro, con tamaño de paso $h = 0{,}05$, se obtiene $x_1(1) \approx 140645$ unidades, $x_2(1) \approx 139292$ unidades, $x_3(1) \approx 95061$ unidades.

2. a) La matriz con las abscisas, en la primera columna, la aproximación a la solución y el error cometido, en la segunda y tercera columnas respectivamente, la aproximación a la derivada tercera de la solución y el error cometido, en la cuarta y quinta columnas respectivamente, es:

$$\begin{pmatrix}
1{,}00000000000000 & 0 & 0 & 9{,}00000000000000 & 0 \\
1{,}10000000000000 & 0{,}10000000000000 & 0{,}01654795337774 & 10{,}09939086896903 & 0{,}01562148741931 \\
1{,}20000000000000 & 0{,}23000000000000 & 0{,}04273791313721 & 11{,}01479776379127 & 0{,}03491325168462 \\
1{,}30000000000000 & 0{,}39900000000000 & 0{,}08010162435704 & 11{,}79084801102507 & 0{,}05265631606274 \\
1{,}40000000000000 & 0{,}61709939086897 & 0{,}12989868276049 & 12{,}45962590853798 & 0{,}06708437838800 \\
1{,}50000000000000 & 0{,}89531297037070 & 0{,}19317962372515 & 13{,}04449983067634 & 0{,}07790725911637 \\
1{,}60000000000000 & 1{,}24543158651621 & 0{,}27083314391485 & 13{,}56273165663311 & 0{,}08542638385975 \\
1{,}70000000000000 & 1{,}67991486521405 & 0{,}36362155100185 & 14{,}02725530847335 & 0{,}09013908759620 \\
1{,}80000000000000 & 2{,}21180730629489 & 0{,}47220754514340 & 14{,}44789757647571 & 0{,}09256619488179 \\
1{,}90000000000000 & 2{,}85467164141536 & 0{,}59717461078370 & 14{,}83222494780710 & 0{,}09318242816453 \\
2{,}00000000000000 & 3{,}62253512588394 & 0{,}73904267395084 & 15{,}18613807391245 & 0{,}09239380307795
\end{pmatrix}.$$

   b) La matriz con las abscisas, en la primera columna, la aproximación a la solución y el error cometido, en la segunda y tercera columnas respectivamente, la aproximación a la derivada tercera de la solución y el error cometido, en la cuarta y quinta columnas respectivamente, es:

$$\begin{pmatrix}
1{,}00000000000000 & 0 & 0 & 9{,}00000000000000 & 0 \\
1{,}10000000000000 & 0{,}11654776507713 & 0{,}00000018830061 & 10{,}08376564018200 & 0{,}00000374136772 \\
1{,}20000000000000 & 0{,}27273759341718 & 0{,}00000031972004 & 10{,}97987938242857 & 0{,}00000512967808 \\
1{,}30000000000000 & 0{,}47910105592220 & 0{,}00000056843484 & 11{,}73818635099738 & 0{,}00000534396495 \\
1{,}40000000000000 & 0{,}74699703409016 & 0{,}00000103953930 & 12{,}39253653674874 & 0{,}00000499340125 \\
1{,}50000000000000 & 1{,}08849079479831 & 0{,}00000179929753 & 12{,}96658817613077 & 0{,}00000439542920 \\
1{,}60000000000000 & 1{,}51626183931491 & 0{,}00000289111615 & 13{,}47730155763755 & 0{,}00000371513581 \\
1{,}70000000000000 & 2{,}04353207184546 & 0{,}00000434437044 & 13{,}93711318413789 & 0{,}00000303673927 \\
1{,}80000000000000 & 2{,}68400867195247 & 0{,}00000617948582 & 14{,}35532898050310 & 0{,}00000240109082 \\
1{,}90000000000000 & 3{,}45183784122408 & 0{,}00000841097498 & 14{,}73904069390451 & 0{,}00000182573807 \\
2{,}00000000000000 & 4{,}36156675051771 & 0{,}00001104931706 & 15{,}09374295500815 & 0{,}00000131582635
\end{pmatrix}.$$

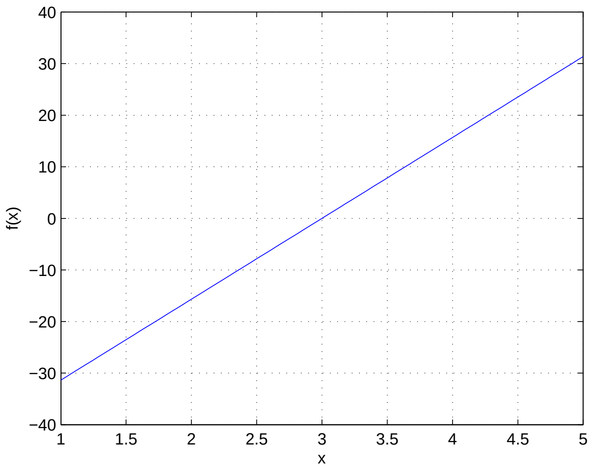
c) La matriz con las abscisas, en la primera columna, la aproximación a la solución y el error cometido, en la segunda y tercera columnas respectivamente, la aproximación a la derivada tercera de la solución y el error cometido, en la cuarta y quinta columnas respectivamente, es:

$$\begin{pmatrix}
1{,}00000000000000 & 0 & 0 & 9{,}00000000000000 & 0 \\
1{,}10000000000000 & 0{,}11654794892449 & 0{,}00000000445325 & 10{,}08376977356194 & 0{,}00000039201222 \\
1{,}20000000000000 & 0{,}27273789929534 & 0{,}00000001384187 & 10{,}97988472106256 & 0{,}00000020895591 \\
1{,}30000000000000 & 0{,}47910160686322 & 0{,}00000001749382 & 11{,}73819181011379 & 0{,}00000011515146 \\
1{,}40000000000000 & 0{,}74699805577816 & 0{,}00000001785130 & 12{,}39254159503437 & 0{,}00000006488438 \\
1{,}50000000000000 & 1{,}08849257789761 & 0{,}00000001619823 & 12{,}96659260845601 & 0{,}00000003689604 \\
1{,}60000000000000 & 1{,}51626471720294 & 0{,}00000001322812 & 13{,}47730529356613 & 0{,}00000002079276 \\
1{,}70000000000000 & 2{,}04353640689301 & 0{,}00000000932288 & 13{,}93711623214295 & 0{,}00000001126580 \\
1{,}80000000000000 & 2{,}68401484674297 & 0{,}00000000469532 & 14{,}35533138709105 & 0{,}00000000549713 \\
1{,}90000000000000 & 3{,}45184625273462 & 0{,}00000000053557 & 14{,}73904252158144 & 0{,}00000000193887 \\
2{,}00000000000000 & 4{,}36157781311564 & 0{,}00000001328087 & 15{,}09374426940909 & 0{,}00000000142541
\end{pmatrix}.$$

3. a) Mediante el método de disparo lineal, con llamada a Runge-Kutta clásico de cuarto orden, y con tamaño de paso $h = 0{,}1$, se obtiene

$$y''(0{,}7) \approx -0{,}21849152324476.$$

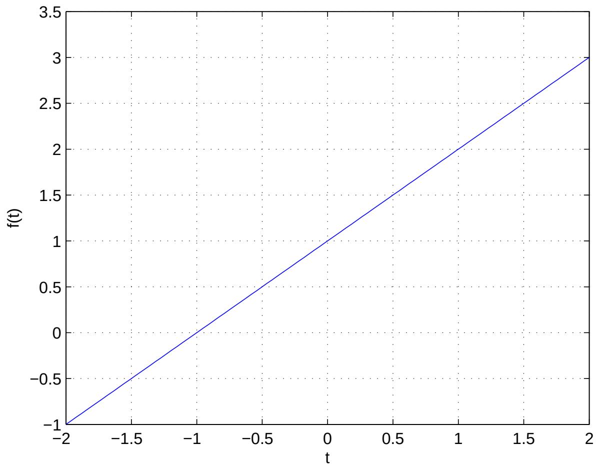
b) La representación gráfica de la función $f(x) = y'''(x, 2) + y(x, 2) - 3$ es



Aplicando el método de la secante con las especificaciones: $P_0 = 2$, $P_1 = 4$, número máximo de iteraciones 20, y criterio de parada $|P(k) - P(k-1)| < 10^{-10}$ y $|f(P(k))| < 10^{-10}$, se obtiene que converge en la iteración $k = 4$, siendo

$$x = 3.$$

4. a) La representación gráfica de la función $f(t) = t^2 y'''(t) + y(t)$ es



Aplicando el método de la secante con las especificaciones: $P_0 = -1{,}5$, $P_1 = -0{,}5$, número máximo de iteraciones 20, y criterio de parada $|P(k) - P(k-1)| < 10^{-10}$ y $|f(P(k))| < 10^{-10}$, se obtiene que converge en la iteración $k = 4$, siendo

$$t = -1.$$

b) La matriz con el paso utilizado, en la primera columna, y las aproximaciones a la integral en las restantes columnas, usando el esquema de Romberg a partir de la regla compuesta del trapecio con $h = 0{,}1$ y tolerancia 10^{-5}, es:

$$\begin{pmatrix} 0{,}10000000000000 & 3{,}33500000000000 & 0 & 0 \\ 0{,}05000000000000 & 3{,}33375000000000 & 3{,}33333333333333 & 0 \\ 0{,}02500000000000 & 3{,}33343750000000 & 3{,}33333333333333 & 3{,}33333333333333 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia

$$I \approx 3{,}33333333333333.$$

5. a) Tomando $h = 0{,}05$ para el método del disparo, y como aproximación a la derivada el elemento que ocupa la posición $(3,3)$ en la matriz de Richardson, máximo descenso converge con las especificaciones dadas en la iteración $k = 27$, y la aproximación es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0{,}00426829277573 \\ 0{,}95138278344495 \end{pmatrix}.$$

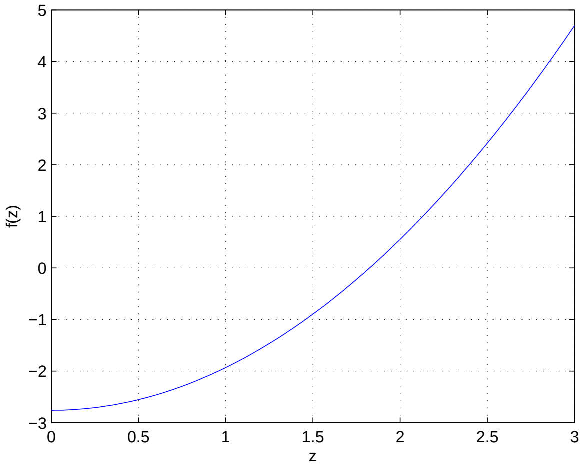
b) La aproximación a la integral, usando el esquema de Romberg a partir de la regla compuesta del trapecio con $h = 0{,}1$ y tolerancia 10^{-6}, es:

$$I \approx 2{,}44252056634478.$$

Utilizando un mallado de 400 puntos se obtiene:

$$\max_{x\in[0,1]}\left[\min_{z\in[1,2]} y\left(\frac{2}{3};x,z\right)\right]\approx 0{,}43811154759721.$$

c) La representación gráfica de la función $f(z)=y''\left(\frac{1}{2};2,z\right)-y\left(\frac{1}{2};2,z\right)$ es



Aplicando el método de la secante con las especificaciones: $P_0=1{,}5$, $P_1=2$, número máximo de iteraciones 20, y criterio de parada $|P(k)-P(k-1)|<10^{-10}$ y $|f(P(k))|<10^{-10}$, se obtiene que converge en la iteración $k=8$, siendo

$$x\approx 1{,}82502076717126.$$