Tema 6

PROBLEMAS DE VALORES INICIALES Y DE CONTORNO PARA ECUACIONES DIFERENCIALES

RESUMEN TEÓRICO

6.1. Problema de valor inicial para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Sea el problema de valor inicial para la ecuación diferencial ordinaria (Problema de Cauchy)

$$(P.C.) \begin{cases} y' = f(t,y), & t \in [a,b], \\ y(a) = \alpha. \end{cases}$$

Definición 6.1. *Una función derivable $y(t)$ es solución del problema de valor inicial anterior $(P.C.)$, en el intervalo $[a,b]$, si cumple:*

1) $y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t \in [a,b]$

2) $y(a) = \alpha$.

Teorema 6.1. (existencia y unicidad de soluciones) *Sea $f(t,y)$ una función continua, en el rectángulo $R = \{(t,y)/a \leq t \leq b,\ c \leq y \leq d\}$, verificando $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| \leq L$ para todo punto $(t,y) \in R$, con L una constante positiva y $(a,\alpha) \in R$. El problema de valor inicial $(P.C.)$ tiene solución única en algún intervalo $[a, a+\epsilon]$.*

El paquete Matlab dispone de un comando **quiver** que permite dibujar el campo de direcciones de una ecuación diferencial.

El método de Euler. Sea $h = (b-a)/n$ y $t_i = a + ih$ para $(i = 0, 1, \ldots, n)$. El método de Euler construye $w_i = w(t_i, h) \approx y(t_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, donde

$$(M.E.) \begin{cases} w_0 = \alpha, \\ w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

(ecuación en diferencias del método de Euler con error de truncamiento local $\mathcal{O}(h^1)$).

En la práctica y debido a los errores de redondeo el esquema real del método de Euler es

$$(M.E.P.) \begin{cases} u_0 = \hat{\alpha}, \\ u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i) + \delta_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

es decir, en lugar de calcularse w_i se obtiene u_i, más concretamente u_i es la respuesta que obtenemos del ordenador $(y(t_i) \approx w_i \approx u_i)$.

El resultado que enunciamos a continuación nos acota el error cometido (truncamiento + redondeo) y nos previene de tomar un tamaño de paso muy pequeño (¡El error tiende a ∞ cuando h tiende a 0!). En cada caso habrá un h óptimo igual que ocurria en el tema de la derivación numérica.

Teorema 6.2. *Sea $y(t)$ la solución única del problema de valor inicial bien planteado $(P.C.)$ (basta para ello que f cumpla las hipótesis del teorema 6.1) y sean $u_0, u_1, \ldots, u_n$ las aproximaciones obtenidas usando $(M.E.P.)$. Si $|\delta_i| < \delta$ para $i = 0, 1, \ldots, n$, donde $\delta_0 = \hat{\alpha} - \alpha$ y además existe una constante M tal que $|y''(t)| \leq M$ para toda $t \in [a, b]$. Entonces*

$$|y(t_i) - u_i| \leq \frac{1}{L}\left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}\right)[e^{L(t_i - a)} - 1] + |\delta_0| e^{L(t_i - a)},$$

para $i = 0, 1, \ldots, n$.

Utilizando la fórmula de Taylor de orden $N > 1$ podemos obtener métodos cuyo error de truncamiento local sea de orden alto $\mathcal{O}(h^N)$ (en particular cuando $N = 1$ se obtiene el método de Euler), pero estos métodos tienen el inconveniente de que necesitan calcular y evaluar las derivadas de la función $f(t, y)$, razón por la cual no se suelen emplear en la práctica. Para evitar el inconveniente anterior se utilizan los métodos de Runge-Kutta.

6.1.1. Métodos de Runge-Kutta

Estos métodos se construyen a partir de un método de Taylor de orden N, pero no necesitan calcular las derivadas de la función $f(t, y)$.

El método del Euler modificado.

$$(M.E.M.) \begin{cases} w_0 = \alpha, \\ w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_i + hf(t_i, w_i))\right], \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

(ecuación en diferencias del método de Euler modificado con error de truncamiento local $\mathcal{O}(h^2)$).

El método de Heun.

$$(M.H.)\begin{cases} w_0 = \alpha, \\ w_{i+1} = w_i + \frac{h}{4}\left[f(t_i, w_i) + 3f\left(t_i + \frac{2h}{3}, w_i + \frac{2h}{3} f(t_i, w_i)\right)\right], \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

(ecuación en diferencias del método de Heun con error de truncamiento local $\mathcal{O}(h^2)$).

El método de Runge-Kutta clásico de orden cuatro.

$$(M.R-K.C.)\begin{cases} w_0 = \alpha, \\ w_{i+1} = w_i + \frac{k_1+2k_2+2k_3+k_4}{6}, \\ \qquad k_1 = hf(t_i, w_i), \\ \qquad k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}\right), \\ \qquad k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}\right), \\ \qquad k_4 = hf(t_i + h, w_i + k_3), \\ i = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

(ecuación en diferencias del método de Runge-Kutta clásico de orden cuatro con error de truncamiento local $\mathcal{O}(h^4)$).

El programa *MATLAB* tiene dos funciones **ode23** y **ode45** que implementan algoritmos de Runge-Kutta para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. La primera utiliza fórmulas de Runge-Kutta de órdenes 2 y 3, mientras que **ode45** usa fórmulas de orden 4 y 5.

Si queremos resolver el problema de Cauchy (P.C.) debemos creamos un fichero de función **yprima.m** para evaluar $f(t, y)$. La instrucción

[t,w]=ode45('yprima',[a,b],alpha,options)

proporciona la solución del problema: en el vector t se almacenan los nodos que se han utilizado y en el vector w los valores aproximados de la solución en cada nodo. El comando

[t,w]=ode23('yprima',[a,b],alpha,options)

funciona de forma análoga.

6.1.2. Problema de valor inicial para un Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Ecuaciones Diferenciales de orden superior

Los métodos numéricos estudiados pueden extenderse al caso de un sistema de ecuaciones diferenciales.

Definición 6.2. *Un sistema de m ecuaciones diferenciales de primer orden es un sistema que podemos expresar, en el caso más sencillo, como*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, ..., y_m), \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, ..., y_m), \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ y_m' = f_m(t, y_1, y_2, ..., y_m), \end{cases}$$

donde $t \in [a, b]$ con las condiciones iniciales $(y_1(a), y_2(a), ..., y_m(a)) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$.

Una solución del mismo es un conjunto de m funciones $y_i(t)$ que satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales y las condiciones iniciales.

Los métodos estudiados para una ecuación de primer orden pueden generalizarse para estudiar un sistema de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo en el caso de ser $m = 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = f_1(t, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2), \end{array} \right.$$

donde $t \in [a, b]$ con las condiciones iniciales $(y_1(a), y_2(a)) = (\alpha_1, \alpha_2)$, utilizando notación vectorial $y = (y_1, y_2)$, $f(t, y) = (f_1(t, y), f_2(t, y))$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ lo podríamos escribir como

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(t, y), \quad t \in [a, b], \\ y(a) = \alpha. \end{array} \right.$$

Si empleamos el método clásico de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver el sistema anterior obtendriamos el algoritmo

Método de Runge-Kutta clásico de orden cuatro para sistemas.

$$(M.R-K.C.S.) \left\{ \begin{array}{l} w_0 = (\alpha_1, \alpha_2), \\ w_{i+1} = w_i + \frac{k_1+2k_2+2k_3+k_4}{6}, \\ \qquad k_1 = h\left(f_1(t_i, w_i), f_2(t_i, w_i)\right), \\ \qquad k_2 = h\left(f_1\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}\right), f_2\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}\right)\right) \\ \qquad k_3 = h\left(f_1\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}\right), f_2\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}\right)\right) \\ \qquad k_4 = h\left(f_1(t_i + h, w_i + k_3), f_2(t_i + h, w_i + k_3)\right), \\ i = 0, 1, \ldots, n-1 \end{array} \right.$$

En algunos casos las ecuaciones diferenciales que aparecen son de orden mayor que uno.

Definición 6.3. *Un problema de valor inicial para una ecuación diferencial de orden m, dada en forma explícita, es*

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(m)} = f(t, y, y', ..., y^{(m-1)}), \quad t \in [a, b], \\ (y(a), y'(a), ..., y^{(m-1)}(a)) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \end{array} \right.$$

Para encontrar la función solución $y(t)$ se realiza el cambio de variable

$$y_1 = y(t), y_2 = y'(t), y_3 = y''(t), ..., y_m = y^{(m-1)}(t)$$

transformandose la ecuación diferencial de orden m en el sistema de m ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = y_4, \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ y_m' = f(t, y_1, y_2, ..., y_m), \end{array} \right.$$

donde $t \in [a, b]$ con las condiciones iniciales $(y_1(a), y_2(a), ..., y_m(a)) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$.

Notemos que la solución de la ecuación diferencial de orden m se obtiene como primera componente del vector solución, siendo las restantes funciones componentes las derivadas de la función solución.

6.2. Problema de contorno para una Ecuación Diferencial Ordinaria

Nos planteamos ahora resolver una ecuación diferencial de segundo orden del tipo

$$x'' = f(t, x, x'), \quad t \in [a, b],$$

con las condiciones de frontera

$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta.$$

Este problema así planteado se denomina un problema de contorno o con valores en la frontera. En particular estudiaremos el caso en el que el problema de frontera es lineal, es decir cuando la función f es de la forma

$$f(t, x, x') = p(t)x' + q(t)x + r(t),$$

donde $p(t),\ q(t)$, y $r(t)$ son funciones arbitrarias.

Teorema 6.3. (existencia y unicidad de soluciones) *Si el problema de valor en la frontera*

$$x'' = p(t)x' + q(t)x + r(t), \quad t \in [a, b], \quad x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta,$$

cumple

1) *$p(t),\ q(t)$ y $r(t)$ son funciones continuas en $[a, b]$,*

2) *$q(t) > 0$ en $[a, b]$,*

tiene solución única $x(t)$ en $[a, b]$.

El método que damos a continuación, para resolver un problema lineal con valores en la frontera, se basa en descomponer este problema en dos problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales de segundo orden.

El método del disparo lineal.

Si denotamos por $u(t)$ la solución única del problema de valor inicial

$$u'' = p(t)u' + q(t)u + r(t), \quad t \in [a, b], \quad u(a) = \alpha, \quad u'(a) = 0,$$

y por $v(t)$ la solución única del problema de valor inicial

$$v'' = p(t)v' + q(t)v, \quad t \in [a, b], \quad v(a) = 0, \quad v'(a) = 1,$$

entonces la función

$$x(t) = u(t) + \frac{\beta - u(b)}{v(b)} v(t)$$

es la única solución del problema de contorno .

Referencias básicas: Burden y Faires [1985, Cap. 5]; Cordero, Hueso, Martínez y Torregrosa[2006, Cap. 5 y 9]; Henrici [1972, Cap. 14]; Henrici [1982, 6.4-6.7]; Kincaid y Cheney [1994, Cap. 8]; Mathews y Fink [2000, Cap. 9]; Stoer y Bulirsch [1980, 7.2].

Ejercicios Resueltos Tema 6

PROBLEMA 6-1: Sea el problema de Cauhy:

$$y' = -y + t^2 + 1, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(1) Por el método de Euler calcular una aproximación a $y(1)$ con $h = 0.01$. De igual forma calcular aproximaciones a $y(0.1), y(0.2), \ldots, y(1)$, así como el error [1] cometido mediante el método Euler, para $h = 0.1$, $h = 0.01$ y $h = 0.001$.

(2) Idem al apartado (1) para el método de Heun.

(3) Idem al apartado (1) para un método de Runge–Kutta de orden cuatro.

(4) Idem al apartado (1) mediante el comando de Matlab ode23.

SOLUCIÓN PROBLEMA 6-1:

La función $f(t, y) = -y + t^2 + 1$ está definida en el fichero fty.m, que listamos a continuación:

```
function yp=fty(t,y)
yp=-y+t.^2+1;
```

Apartado (1)

```
w=1; %condicion inicial  y(0)=1
t=0; %tiempo inicial
T=1; %tiempo final
n=100; %numero de divisiones del intervalo [t,T]
h=(T-t)/100; %longitud del tamaño de paso
% calculo de wk por Euler
for k=1:n
    w=w+h*fty(t,w);
    t=t+h;
end
'la aproximacion a la solucion en',T, 'es',
format long,  w,  'con error',  format short e,  E=abs(-2*exp(-T)+T^2-2*T+3-w)
```

[1] Téngase en cuenta que la solución para este problema de Cauchy es conocida en forma explícita (hecho no frecuente en la práctica), más concretamente la solución viene dada por $y(t) = -2e^{-t} + t^2 - 2t + 3$.

RESULTADO

▷ la aproximacion a la solucion en T= 1 es 1.26159564086627 con error E = 2.6455e-03. ◁

```
%Queremos una tabla con las aproximaciones en y(0.1),y(0.2),...,y(1)
%junto con el error cometido (para distintos pasos)
 w=1;
 t=0;
 tf=1; %tiempo final
 n=10; %numero de divisiones del intervalo [t,tf]
 h=(tf-t)/10;
 c=0;
 %calculo de wk por Euler
 for k=1:n
     w=w+h*fty(t,w);
     if abs(fix(k/1)-k/1)<10^(-14)
        c=c+1;
        W(c)=w;
        E(c)=abs(-2*exp(-(t+h))+(t+h)^2-2*(t+h)+3-w);
     end
     t=t+h;
 end
 for i=1:10  format long,  W(i),  format short e,  E(i),  end
```

RESULTADO

t	$w(t, 0{,}1) \approx y(t)$	$Error(t, 0{,}1)$
0.1	$w_1 = 1$	3.2516e-04
0.2	w_2 =1.00100000000000	1.5385e-03
0.3	w_3 =1.00490000000000	3.4636e-03
0.4	w_4 =1.01341000000000	5.9499e-03
0.5	w_5 =1.02806900000000	8.8697e-03
0.6	w_6 =1.05026210000000	1.2115e-02
0.7	w_7 =1.08123589000000	1.5594e-02
0.8	w_8 =1.12211230100000	1.9230e-02
0.9	w_9 =1.17390107090000	2.2960e-02
1.0	w_{10} =1.23751096381000	2.6730e-02

Cuadro 6.1: Resultado problema 6-1 apartado (1), h=0.1

```
 %Para h=0.01
 w=1;
 t=0;
 tf=1;
 n=100;
```

```
h=(tf-t)/100;
c=0;
for k=1:n
    w=w+h*fty(t,w);
    if abs(fix(k/10)-k/10)<10^(-14)
    c=c+1;
    W(c)=w;
    E(c)=abs(-2*exp(-(t+h))+(t+h)^2-2*(t+h)+3-w);
end
t=t+h;
end
for i=1:10
format long
W(i),
format short e
E(i)
end
```

RESULTADO

t	$w(t, 0{,}01) \approx y(t)$	$Error(t, 0{,}01)$
0.1	w_{10} =1.00027967073248	4.5493e-05
0.2	w_{20} =1.00236519418151	1.7330e-04
0.3	w_{30} =1.00799625695732	3.6730e-04
0.4	w_{40} =1.01874620044634	6.1371e-04
0.5	w_{50} =1.03603792639630	9.0075e-04
0.6	w_{60} =1.06115828164238	1.2184e-03
0.7	w_{70} =1.09527106739559	1.5583e-03
0.8	w_{80} =1.13942880461002	1.9133e-03
0.9	w_{90} =1.19458337437013	2.2773e-03
1.0	w_{100} =1.26159564086627	2.6455e-03

Cuadro 6.2: Resultado problema 6-1 apartado (1), h=0.01

```
%Para h=0.001
w=1;
t=0;
tf=1;
n=1000;
h=(tf-t)/1000;
c=0;
for k=1:n
    w=w+h*fty(t,w);
    if abs(fix(k/100)-k/100)<10^(-14)
```

```
    c=c+1;
    W(c)=w;
    E(c)=abs(-2*exp(-(t+h))+(t+h)^2-2*(t+h)+3-w);
end
t=t+h;
end
for i=1:10
format long
W(i),
format short e
E(i)
end
```

RESULTADO

t	$w(t, 0{,}001) \approx y(t)$	$Error(t, 0{,}001)$
0.1	w_{100} =1.00032049791970	4.6660e-06
0.2	w_{200} =1.00252098987221	1.7504e-05
0.3	w_{300} =1.00832664271996	3.6916e-05
0.4	w_{400} =1.01929837389253	6.1534e-05
0.5	w_{500} =1.03684848922249	9.0191e-05
0.6	w_{600} =1.06225483193649	1.2190e-04
0.7	w_{700} =1.09667358455123	1.5581e-04
0.8	w_{800} =1.14115085192846	1.9122e-04
0.9	w_{900} =1.19663314153214	2.2754e-04
1.0	w_{1000} =1.26397684588284	2.6427e-04

Cuadro 6.3: Resultado problema 6-1 apartado (1) con h=0.001

Apartado (2)

```
w=1; %condicion inicial  y(0)=1
t=0; %tiempo inicial
T=1; %tiempo final
n=100; %numero de divisiones del intervalo [t,T]
h=(T-t)/100; %longitud del tamaño de paso
% calculo de wk por Heun
for k=1:n
    w=w+h/4*(fty(t,w)+3*fty(t+2/3*h,w+2/3*h*fty(t,w)));
    t=t+h;
end
'la aproximacion a la solucion en',T, 'es',
format long
w
'con error',
```

```
format short e
E=abs(-2*exp(-T)+T^2-2*T+3-w)
```

$\triangleright$ La aproximación de la solución en T = 1 es 1.26424993892880 y el error cometido es E = 8.8213e-06. $\triangleleft$

```
%Queremos una tabla con las aproximaciones en y(0.1),y(0.2),...,y(1)
%junto con el error cometido (para distintos pasos)
 w=1;
 t=0;
 tf=1;
 n=10;
 h=(tf-t)/10;
 c=0;
 for k=1:n
    w=w+h/4*(fty(t,w)+3*fty(t+2/3*h,w+2/3*h*fty(t,w)));
    if abs(fix(k/1)-k/1)<10^(-14)
    c=c+1;
    W(c)=w;
    E(c)=abs(-2*exp(-(t+h))+(t+h)^2-2*(t+h)+3-w);
    end
    t=t+h;
 end
 for i=1:10
 format long
 W(i),
 format short e
 E(i)
 end
```

RESULTADO

$\triangleright$ Análogamente se hace para $h = 0.01$ y $h = 0.001$. Los resultados aparecen en la tabla 6.4. $\triangleleft$

	$h = 0{,}1$		$h = 0{,}01$		$h = 0{,}001$	
t	$w(t, 0{,}1) \approx y(t)$	$Error(t, 0{,}1)$	$w(t, 0{,}01) \approx y(t)$	$Error(t, 0{,}01)$	$w(t, 0{,}001) \approx y(t)$	$Error(t, 0{,}001)$
0.1	1.00033333333333	8.1694e-06	1.00032531306468	1.4914e-07	1.00032516548093	1.5528e-09
0.2	1.00258500000000	4.6506e-05	1.00253906710898	5.7326e-07	1.00253849967433	5.8303e-09
0.3	1.00847275833333	1.0920e-04	1.00836477733361	1.2187e-06	1.00836357093629	1.2300e-08
0.4	1.01955117962500	1.9127e-04	1.01936194740148	2.0395e-06	1.01935992843393	2.0505e-08
0.5	1.03722715089396	2.8847e-04	1.03694167694990	2.9964e-06	1.03693871063248	3.0058e-08
0.6	1.06277390489237	3.9718e-04	1.06238078387532	4.0561e-06	1.06237676843860	4.0627e-08
0.7	1.09734371726092	5.1432e-04	1.09683458272652	5.1903e-06	1.09682944434916	5.1932e-08
0.8	1.14197939745447	6.3733e-04	1.14134844709220	6.3753e-06	1.14134213550341	6.3738e-08
0.9	1.19762468802963	7.6401e-04	1.19686827169964	7.5912e-06	1.19686075636543	7.5847e-08
1.0	1.26513367600015	8.9256e-04	1.26424993892880	8.8213e-06	1.26424120575086	8.8094e-08

Cuadro 6.4: Resultado problema 6-1 apartado (2)

Apartado (3)

En principio definimos una función Runge4 que nos construye w_{i+1} a partir de t_i, w_i y h (está en el fichero Runge4.m, que listamos a continuación).

```
%Define w(i+1) en funcion de (ti,wi,h) mediante un Runge--Kutta
%de orden cuatro.
function y=Runge4(t,w,h)
k1=h*fty(t,w);
k2=h*fty(t+h/2,w+k1/2);
k3=h*fty(t+h/2,w+k2/2);
k4=h*fty(t+h,w+k3);
y=w+1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
```

Cálculo de $y(1)$ mediante un método Runge-Kutta de orden cuatro para $h = 0.01$.

```
w=1;
t=0;
T=1;
n=100;
h=(T-t)/100;
%calculo de wk mediante un Runge-Kutta de orden 4
for k=1:n
    w=Runge4(t,w,h);
    t=t+h;
end
'la aproximacion a la solucion en',T, 'es',
format long
w
'con error',
format short e
E=abs(-2*exp(-T)+T^2-2*T+3-w)
```

▷ La aproximación de la solución en T = 1 es 1.26424111772764 con error 7.0525e-11. ◁

Cálculo mediante un Runge-Kutta de orden cuatro de $y(0.1)$, $y(0.2)$, …, $y(1)$ para $h = 0.1$, $h = 0.01$ y $h = 0.001$.

```
%Para h=0.001
w=1;
t=0;
tf=1;
n=1000;
h=(tf-t)/1000;
c=0;
for k=1:n
    w=Runge4(t,w,h);
    if abs(fix(k/100)-k/100)<10^(-14)
    c=c+1;
    W(c)=w;
    E(c)=abs(-2*exp(-(t+h))+(t+h)^2-2*(t+h)+3-w);
    end
    t=t+h;
```

```
end
for i=1:10
format long
W(i),
format short e
E(i)
end
```

RESULTADO

$\triangleright$ Análogamente se hace para los casos $h = 0.1$ y $h = 0.01$. Los resultados aparecen en la tabla 6.5. $\triangleleft$

	$h = 0{,}1$		$h = 0{,}01$		$h = 0{,}001$	
t	$w(t, 0{,}1) \approx y(t)$	$Error(t, 0{,}1)$	$w(t, 0{,}01) \approx y(t)$	$Error(t, 0{,}01)$	$w(t, 0{,}001) \approx y(t)$	$Error(t, 0{,}001)$
0.1	1.00032520833333	4.4405e-08	1.00032516393280	4.7182e-12	1.00032516392808	1.9984e-15
0.2	1.00253859402865	1.0018e-07	1.00253849385447	1.0434e-11	1.00253849384404	1.9984e-15
0.3	1.00836372340773	1.6477e-07	1.00836355865348	1.6916e-11	1.00836355863657	2.6645e-15
0.4	1.01936014391227	2.3598e-07	1.01935990795269	2.3965e-11	1.01935990792873	3.3307e-15
0.5	1.03693899255056	3.1198e-07	1.03693868060615	3.1416e-11	1.03693868057474	2.2204e-15
0.6	1.06237711900530	3.9119e-07	1.06237672785108	3.9128e-11	1.06237672781195	3.5527e-15
0.7	1.09682986475129	4.7233e-07	1.09682939246416	4.6983e-11	1.09682939241719	5.3291e-15
0.8	1.14134262608023	5.5431e-07	1.14134207182044	5.4886e-11	1.14134207176556	5.7732e-15
0.9	1.19686131675920	6.3624e-07	1.19686068058156	6.2754e-11	1.19686068051881	6.4393e-15
1.0	1.26424183503644	7.1738e-07	1.26424111772764	7.0524e-11	1.26424111765712	6.6613e-15

Cuadro 6.5: Resultado problema 6-1 apartado (3)

Apartado (4)

Cálculo de $y(1)$ mediante el comando ode23 para $h = 0.01$.

```
options=odeset('MaxStep',0.01,'InitialStep',0.01);
[T W]=ode23('fty',[0 1],1,options);
n=length(T);
'la aproximacion a la solucion en',T(n), 'es',
format long
W(n)
'con error',
format short e
E=abs(-2*exp(-T(n))+T(n).^2-2*T(n)+3-W(n))
```

$\triangleright$ La aproximación de la solución en T = 1 es 1.26424109561948 con error 2.2038e-008. $\triangleleft$

Cálculo mediante el comando de Matlab ode23 de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $\ldots$, $y(1)$ para $h = 0.1$, $h = 0.01$ y $h = 0.001$.

```
options=odeset('MaxStep',0.1,'InitialStep',0.1);
[T W]=ode23('fty',[0:0.1:1],1,options);
n=length(T);
'la aproximacion a la solucion en',T, 'es',
format long
W(2:n)
```

```
'con error',
format short e
E=abs(-2*exp(-T(2:n))+T(2:n).^2-2*T(2:n)+3-W(2:n))
```

RESULTADO

▷ Análogamente se hace para los casos $h = 0.01$ y $h = 0.001$. Los resultados aparecen en la tabla 6.6. ◁

	$h = 0{,}1$		$h = 0{,}01$		$h = 0{,}001$	
t	$w(t, 0{,}1) \approx y(t)$	$Error(t, 0{,}1)$	$w(t, 0{,}01) \approx y(t)$	$Error(t, 0{,}01)$	$w(t, 0{,}001) \approx y(t)$	$Error(t, 0{,}001)$
0.1	1.00032500000000	1.6393e-007	1.00032516355903	3.6905e-010	1.00032516392769	3.8747e-013
0.2	1.00253740416667	1.0897e-006	1.00253849241774	1.4263e-009	1.00253849384258	1.4571e-012
0.3	1.00836092787014	2.6308e-006	1.00836355559915	3.0374e-009	1.00836355863349	3.0753e-012
0.4	1.01935524623450	4.6617e-006	1.01935990284130	5.0874e-009	1.01935990792359	5.1266e-012
0.5	1.03693160530118	7.0753e-006	1.03693867309654	7.4782e-009	1.03693868056722	7.5142e-012
0.6	1.06236694753002	9.7803e-006	1.06237671768563	1.0126e-008	1.06237672780179	1.0157e-011
0.7	1.09681669302341	1.2699e-005	1.09682937945603	1.2961e-008	1.09682939240420	1.2983e-011
0.8	1.14132630440402	1.5767e-005	1.14134205584238	1.5923e-008	1.14134207174962	1.5934e-011
0.9	1.19684175110157	1.8929e-005	1.19686066155628	1.8963e-008	1.19686068049984	1.8960e-011
1.0	1.26421897778840	2.2140e-005	1.26424109561948	2.2038e-008	1.26424111763509	2.2021e-011

Cuadro 6.6: Resultado problema 6-1 apartado (4)

PROBLEMA 6-2: Sea el problema de contorno:

$$y'' = y' + 2y + cos(t), \quad y(0) = -0{,}3, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0{,}1, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

cuya solución es $y(t) = \frac{-1}{10}(sen(t) + 3\, cos(t))$.

Hallar la solución y su derivada, así como el error cometido para cada una de ellas, para $h = \frac{\pi}{4}$ y $h = \frac{\pi}{8}$.

SOLUCIÓN PROBLEMA 6-2:

Utilizando el método del disparo lineal resolvemos los dos problemas de valor inicial

$$u'' = u' + 2u + cos(t), \quad u(0) = -0{,}3, \quad u'(0) = 0$$

y

$$v'' = v' + 2v, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1,$$

ya que al ser $p(t) = 1, \quad q(t) = 2, \quad r(t) = cos(t)$ funciones continuas y $q(t) > 0$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$, tenemos asegurada la existencia de una única solución en dicho intervalo.

Para resolver la primera ecuación realizamos el cambio de variable $u_1 = u, \quad u_2 = u'$, obteniéndose el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = u_2 + 2u_1 + cos(t), \end{cases}$$

con las condiciones iniciales $(u_1(0), u_2(0)) = (-0{,}3, 0)$.

Análogamente para la segunda ecuación obtendríamos el sistema

$$\begin{cases} v_1' = v_2, \\ v_2' = v_2 + 2v_1, \end{cases}$$

con las condiciones iniciales $(u_1(0), u_2(0)) = (0, 1)$.

La función que aparece en el primer sistema está definida en el fichero ftysis1.m, que listamos a continuación:

```
function Z=ftysis1(t,Z)
u1=Z(1); u2=Z(2);
Z=[u2, u2+2*u1+cos(t)];
```

Análogamente para el otro sistema creamos el fichero ftysis2.m

```
function Z=ftysis2(t,Z)
v1=Z(1); v2=Z(2);
Z=[v2, v2+2*v1];
```

A continuación realizamos un programa rk4sistema.m para resolver estos sistemas de ecuaciones diferenciales mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

```
function [T,Z]=rk4sistema(ftysis,a,b,Za,h)
%
%   Datos de entrada
% ftysis es la función, almacenada como una cadena de caracteres
% a y b son los extremos del intervalo
% Za=[x1(a),...,xn(a)] es la condición inicial
% h es la longitud del tamaño de paso
%
%   Datos de salida
% [T Z] donde T es el vector con las abscisas, de orden (M+1)x1, y
% Z es una matriz de orden (M+1)xn
%
M=(b-a)/h;
T=[a:h:b]';
Z(1,:)=Za;
for j=1:M
    k1=h*feval(ftysis,T(j),Z(j,:));
    k2=h*feval(ftysis,T(j)+h/2,Z(j,:)+k1/2);
    k3=h*feval(ftysis,T(j)+h/2,Z(j,:)+k2/2);
    k4=h*feval(ftysis,T(j)+h,Z(j,:)+k3);
    Z(j+1,:)=Z(j,:)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end
```

Por último construimos el programa disparo.m que llama a los anteriores y nos da la solución del problema de contorno, así como su derivada y los errores cometidos, en cada caso, para $h = \frac{\pi}{4}$ y $h = \frac{\pi}{8}$.

```
function D=disparo(F1,F2,a,b,alfa,beta,h)
%
%       Datos de entrada
% F1 y F2 son los dos sistemas de ecuaciones de primer orden almacenados
% como cadenas de caracteres
% a y b son los extremos del intervalo
% alfa y beta son los valores de la solución en los extremos a y b
% h es la longitud del tamaño de paso
%
%       Datos de salida
% D=[T,Y,errorY,Yprima,errorYprima], donde el vector de las abscisas T
% es de orden (M+1)x1 y el vector solución Y, así como su derivada Yprima
% y los del error cometido al calcular Y e Yprima, son de orden (M+1)x1
%
% solución del sistema F1
Za=[alfa, 0];
[T,Z]=rk4sistema(F1,a,b,Za,h);
U=Z(:,1);
Uprima=Z(:,2);
% solución del sistema F2
Za=[0, 1];
[T,Z]=rk4sistema(F2,a,b,Za,h);
V=Z(:,1);
Vprima=Z(:,2);
% solución del problema de contorno y error cometido
M=(b-a)/h;
Y=U+(beta-U(M+1))*V/V(M+1);
errorY=(-1/10)*(sin(T) + 3*cos(T))-Y;
% derivada de la solución del problema de contorno y error cometido
Yprima=Uprima+(beta-U(M+1))*Vprima/V(M+1);
errorYprima=(-1/10)*(cos(T) - 3*sin(T))-Yprima;
format long
D=[T,Y,errorY,Yprima,errorYprima];
```

La solución se obtiene escribiendo en la ventana de comandos

```
>>disparo('ftysis1','ftysis2',0,pi/2,-0.3,-0.1,pi/4)
```

t	$y(t)$	*Error en* $y(t)$	$y'(t)$	*Error en* $y'(t)$
0	-0.30000000000000	-0.00000000000000	-0.09780100965855	-0.00219899034145
$\frac{\pi}{4}$	-0.28245221929973	-0.00039049317489	0.14141732895624	0.00000402728107
$\frac{\pi}{2}$	-0.10000000000000	-0.00000000000000	0.29792842149032	0.00207157850968

Cuadro 6.7: Resultado problema 6-2 con $h = \frac{\pi}{4}$

Analogamente se obtiene la solución para $h = \frac{\pi}{8}$

```
>>disparo('ftysis1','ftysis2',0,pi/2,-0.3,-0.1,pi/8)
```

t	$y(t)$	$Error\ en\ y(t)$	$y'(t)$	$Error\ en\ y'(t)$
0	-0.30000000000000	-0.00000000000000	-0.09979248933245	-0.00020751066755
$\frac{\pi}{8}$	-0.31541496131302	-0.00001724167688	0.02253602867497	-0.00011895221657
$\frac{\pi}{4}$	-0.28282507383682	-0.00001763863780	0.14145353290477	-0.00003217666746
$\frac{3\pi}{8}$	-0.20718437058186	-0.00000861237880	0.23885518203965	0.00004033447722
$\frac{\pi}{2}$	-0.10000000000000	-0.00000000000000	0.29991878615536	0.00008121384464

Cuadro 6.8: Resultado problema 6-2 con $h = \frac{\pi}{8}$