Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales con Matlab: Ecuaciones diferenciales de primer orden

8 de marzo de 2009

1. Consideremos la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, \lambda)$. Calcular los puntos de bifurcación y dibujar el diagrama de bifurcaciones correspondiente cuando:

   a) $f(x, \lambda) = 3x^3 - 3x - \lambda$. Hallar los puntos de equilibrio, y sus estabilidades, para $\lambda = -2, 0, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
   b) $f(x, \lambda) = (x - \lambda)(x^2 - \lambda)$.
   c) $f(x, \lambda) = \lambda - x^3$.

2. Supongamos que originalmente hay P toneladas de peces en un lago y que su evolución viene dada por la ecuación logística con razón de reproducción $r = 1$ y capacidad de soporte del medio $k = 10$, es decir:

$$\frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{k}).$$

   a) Calcular la población al cabo de 3 meses, si en el instante $t = 0$ hay una tonelada de peces. Hallar el orden de cada método utilizado. ¿Qué ocurre con la población a largo plazo? Hallar los equilibrios y obtener el retrato de fases de dicha ecuación.
   b) En el instante $t = 0$ hay diez toneladas de peces y se comienza a pescar en dicho lago, a razón de 3 toneladas al mes los tres primeros meses y 0.5 toneladas los restantes meses, es decir la función captura viene dada por

$$H(t) = \begin{cases} 3 \quad si \quad t \leq 3, \\ 0.5 \quad si \quad t > 3. \end{cases}$$

   Dibujar la trayectoria correspondiente y la función captura. ¿Cuál es la población al cabo de 18 meses? ¿Cuál es el valor mínimo de la población? A partir del tercer mes, ¿tiende la población a estacionarse? Hallar dicho valor de equilibrio. Encontrar un valor aproximado del valor inicial $P(0)$, que separe la existencia de pesca de la extinción de la especie.
   c) Supongamos que la función captura $H(t)$ es constante en todo instante. ¿Qué ocurre con los puntos de equilibrio al variar esta constante en el intervalo $[0, 3]$? ¿Para qué valor de la constante se produce un cambio en el número de puntos de equilibrio? Dibujar el diagrama de bifurcaciones correspondiente. ¿Cómo se denomina esta bifurcación de equilibrios?
   d) Si suponemos que la capacidad de soporte del medio varía linealmente con el tiempo $k = 10 + t$, y que en el instante $t = 0$ hay una tonelada de peces, dibujar la trayectoria correspondiente así como la función soporte. ¿Cuál es la población al cabo de 5, 10, 15 y 18 meses?, ¿cómo varia la población a largo plazo?
   e) Si suponemos que tanto la capacidad soporte del medio como la función captura varían linealmente con el tiempo, $k = 10 + t$ y $H(t) = 1 + 0.2t$ dibujar las trayectorias correspondiente, así como la funciones soporte y captura, cuando $P(0) = 1.4$ y $P(0) = 2$. ¿Cómo varia la población a largo plazo?

3. Un circuito RC está modelado por la ecuación

$$RC\frac{dV_c}{dt} + V_c = V(t),$$

donde V_c es el voltaje a través del condensador. Supongamos que el tiempo es medido en segundos, la resistencia es $R = 2.3\ \Omega$ y la capacitancia $C = 1.2\ F$.

Se pide:

a) Si el voltaje suministrado por la fuente de tensión viene dado por

$$V(t) = \begin{cases} 3 & si \quad 0 \leq t < 5, \\ 0 & si \quad t \geq 5. \end{cases}$$

Dibujar, en el intervalo de tiempo $[0, 40]$, la solución correspondiente a la condición inicial $V_c(0) = 0$ y la función $V(t)$. ¿Cuál es el valor de V_c en $t = 6$ para la solución que cumple $V_c(5) = 4$?

b) Supongamos ahora que la función $V(t)$ viene dada por una onda cuadrada de amplitud 3 voltios, periodo 32 segundos y ciclo activo del 25 %, es decir

$$V(t) = 3sqw(t, 32, 25).$$

Dibujar, en el intervalo de tiempo $[0, 90]$, la solución correspondiente a la condición inicial $V_c(0) = 0$. Dibujar en la misma ventana la función entrada de voltaje $V(t)$. Notar que la señal de entrada ha sido atenuada, esto es la amplitud ha disminuido en la señal de salida. Repetir lo mismo bajando el periodo a 16 y 4 segundos. ¿Qué ha ocurrido al disminuir el periodo?

c) Consideremos finalmente que la función $V(t)$ viene dada por

$$V(t) = Acos(\omega t),$$

donde $A = 3$ y $\omega = 1, 30, 60$. Dibujar la solución correspondiente a la condición inicial $V_c(0) = 0$ y la función $V(t)$. ¿Cómo varían la amplitud A y la frecuencia ω de la señal de salida?

4. Un tanque con la forma de un cilindro circular recto, tiene una fuga de agua por un agujero circular en su fondo. Si no consideramos la fricción y la contracción del chorro en el agujero, la altura h del agua en el tanque viene dada por la ecuación

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh},$$

donde A_h y A_w son las áreas transversales del agujero y del agua, respectivamente.

a) Si la altura inicial del agua es H, tomando $g = 9.8\,m/s^2$ obtener la solución correspondiente y su intervalo de definición en función de A_h, A_w y H.

b) Si el tanque mide $3\,m$ de altura, $61\,cm$ de radio y el agujero circular tiene $1.27\,cm$ de radio, ¿cuánto tardará en vaciarse si el tanque está lleno al principio?

Cuando sí se tienen en cuenta la fricción y la contracción del agua en el agujero, la ecuación diferencial anterior se transforma en

$$\frac{dh}{dt} = -c\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh},$$

donde $0 < c < 1$. ¿Cuánto tardará ahora el tanque en vaciarse si $c = 0.6$?

Soluciones

SOLUCIÓN PROBLEMA 1

a) Hay dos puntos de bifurcación, a saber:

$$(x_1, \lambda_1) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{y} \quad (x_2, \lambda_2) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

El diagrama de bifurcaciones correspondiente, en el plano (λ, x), lo hemos dibujado en la figura 1.

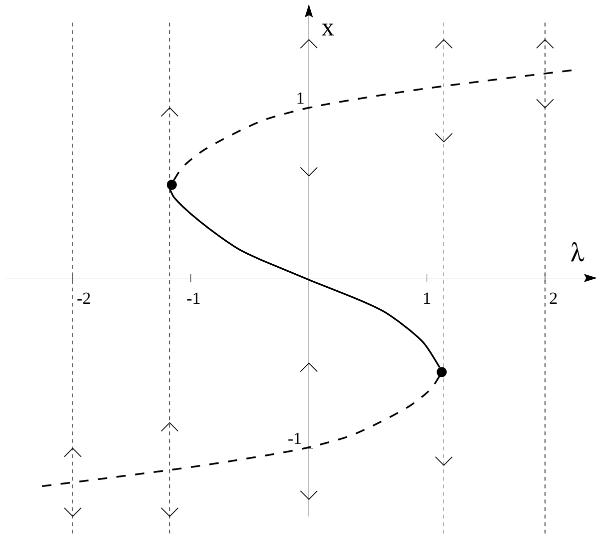

Figura 1: Diagrama cualitativo de bifurcaciones.

Para hallar los puntos de equilibrio cuando $\lambda = -2, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ hemos utilizado el algoritmo de Newton-Raphson. En concreto para resolver la ecuación $f(x) = 3x^3 - 3x + 2 = 0$, tomando como condición inicial $p_0 = -1$ y como criterio de paro $N_{max} = 50$ (número máximo de iteraciones) y $|p_n - p_{n-1}| < 10^{-10}$, se obtiene $\overline{x} \approx -1.24001180971763$. Se comprueba fácilmente que $f'(\overline{x}) > 0$, por lo que el punto de equilibrio es inestable. Análogamente se obtienen, para $\lambda = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, los puntos de equilibrio $\overline{x}_1 \approx -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y $\overline{x}_2 \approx 1.15470053837925$ (tomando como condición inicial $p_0 = 1$). El primer punto de equilibrio, no hiperbólico ($f'(\overline{x}_1) = 0$) por ser un punto de bifurcación, es semiestable y el segundo $\overline{x}_2$ es inestable.

El caso $\lambda = 0$ da lugar a tres puntos de equilibrio: $\overline{x}_1 = -1$, $\overline{x}_2 = 0$ y $\overline{x}_3 = 1$. Los equilibrios $\overline{x}_1$ y $\overline{x}_3$ son inestables y el equilibrio $\overline{x}_2$ es asintóticamente estable ($f'(\overline{x}_2) < 0$).

c) Esta ecuación diferencial no tiene puntos de bifurcación. El diagrama de bifurcaciones correspondiente lo hemos dibujado en la figura 2.

De acuerdo al diagrama hay un único punto de equilibrio $\overline{x} = \sqrt[3]{\lambda}$, que es siempre asintóticamente estable.

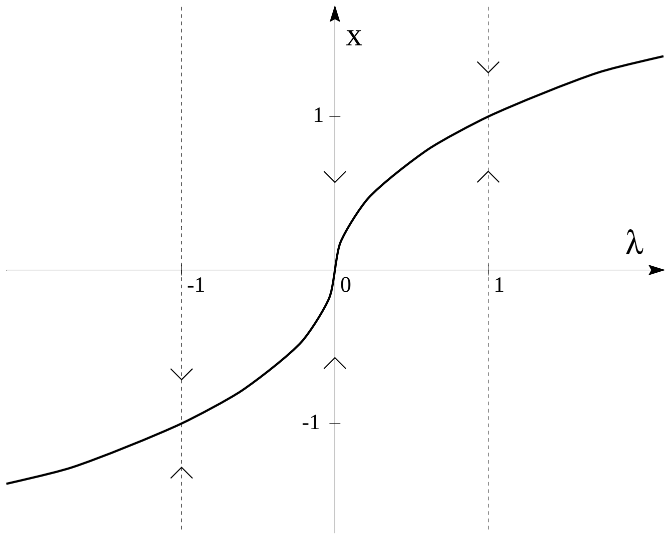

Figura 2: Diagrama cualitativo de bifurcaciones.

$\boxed{\text{SOLUCIÓN PROBLEMA 2}}$

b) Para dibujar la trayectoria creamos el fichero H.m, donde definimos la función captura $H(t)$

```
function v=H(t)
v=3*(t<=3)+0.5*(t>3);
```

En la figura 3 hemos representado la trayectoria correspondiente a las condiciones iniciales $P(0) = 10$ (en color azul) y la función captura (en color rojo).

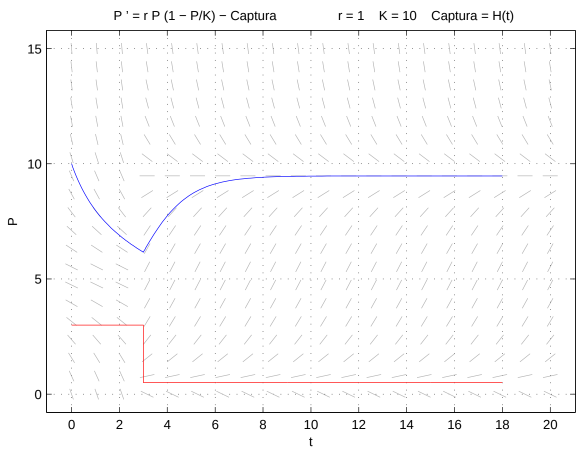

Figura 3: Trayectoria, en color azul, correspondiente a las condiciones iniciales $P(0) = 10$.

Si exportamos los datos de la solución, obtenida mediante el programa dfield, se observa al analizar los mismos que para $t = 18 \quad P(t) \approx 9.472127571$, y mediante el comando min de Matlab se obtiene el valor mínimo de la población $P(t) \approx 6.1626705$ para $t \approx 2.99979$.

La gráfica anterior nos muestra que, en efecto, la población tiende a estacionarse entorno a un valor que podemos calcular teóricamente al resolver la ecuación $f(P) = P\left(1 - \dfrac{P}{10}\right) - \dfrac{1}{2} = 0$. Las dos soluciones son $P_1 = 5 + 2\sqrt{5} \approx 9.4721359$ y $P_2 = 5 - 2\sqrt{5} \approx 0.527864$, siendo la primera asintóticamente estable ($f'(P) < 0$) y la segunda inestable ($f'(P) > 0$). Notar que los valores de estos puntos de equilibrio están más próximos que en el caso del apartado (a) donde la función captura era $H(t) = 0$.

Por otra parte, al dibujar las trayectorias correspondientes a las condiciones iniciales $P(0) = 3.9573$ y $P(0) = 3.9574$ se observa que la población se extingue en el primer caso, mientras que en el segundo la población sobrevive.

c) Si consideramos que $H(t) = C$, al resolver la ecuación $f(P) = P\left(1 - \dfrac{P}{10}\right) - C = 0$ se obtiene, como expresión de los equilibrios $P_1 = 5 + \sqrt{25 - 10C}$ y $P_2 = 5 - \sqrt{25 - 10C}$. En consecuencia si $C > 2.5$ no hay puntos de equilibrio, si $C = 2.5$ hay un solo punto de equilibrio $P_1 = P_2 = 2.5$ y si $C < 2.5$ hay dos puntos de equilibrio.

El diagrama de bifurcaciones está representado en la figura 4. Al pasar el parámetro (Captura=H(t)=C) por el valor $C = 2.5$ tiene lugar una bifurcación silla-nodo de equilibrios. El punto de bifurcación es $(P, H) = (5, 2.5)$

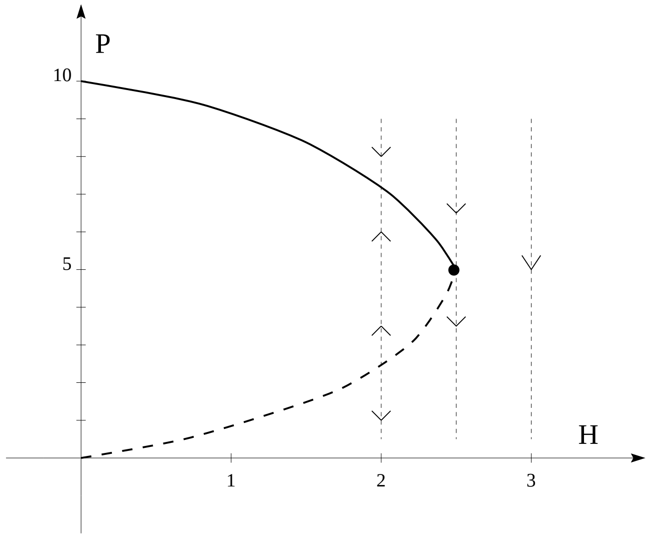

Figura 4: Diagrama cualitativo de bifurcaciones.

e) En la figura 5 aparecen las trayectorias (en color azul) correspondientes a las condiciones iniciales $P(0) = 1.4$ y $P(0) = 2$, así como las funciones captura (en color rojo) y soporte (en color negro). De la misma se desprende que en el primer caso la población se extingue, mientras en el segundo la población, a partir de un determinado instante, crece linealmente con el tiempo manteniéndose más cerca de los valores de la población soporte que de los valores de la función captura.

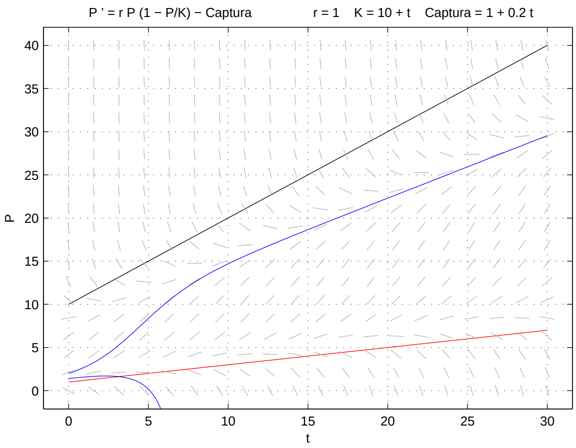

Figura 5: Trayectorias, en color azul, correspondientes a las condiciones iniciales $P(0) = 1.4$ y $P(0) = 2$.

SOLUCIÓN PROBLEMA 3

b) Para dibujar la trayectoria creamos el fichero sqw.m, donde definimos la función onda cuadrada mediante el comando mod de Matlab.

```
function y=sqw(t,T,d)
% t es el tiempo
% T es el periodo de la función
% d es el ciclo de funcionamiento
r=mod(t,T);
y=r<(d*T)/100;
```

En la figura 6 hemos representado la trayectoria correspondiente a las condiciones iniciales $V_c(0) = 0$ (en color azul) y la función voltaje de entrada (en color rojo), cuando el periodo es de 32 segundos. Si el periodo es 16 segundos aparece en la figura 7, y si es de 4 segundos en la figura 8.

De las figuras anteriores se deduce que al disminuir el periodo del voltaje de entrada va disminuyendo también la amplitud de la señal de salida.

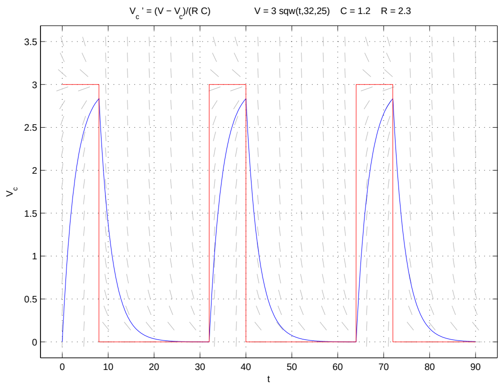

Figura 6: Trayectoria, en color azul, correspondiente a las condiciones iniciales $V_c(0) = 0$ con periodo 32 s.

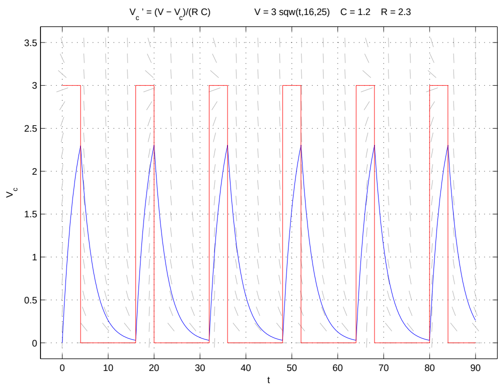

Figura 7: Trayectoria, en color azul, correspondiente a las condiciones iniciales $V_c(0) = 0$ con periodo 16 s.

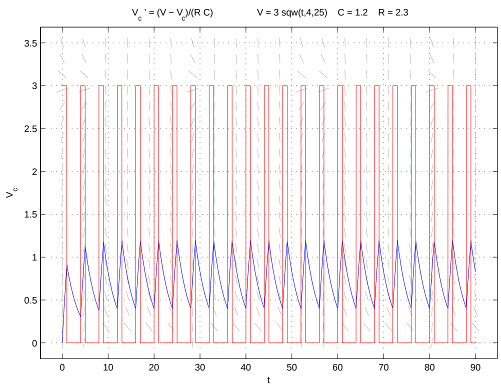

Figura 8: Trayectoria, en color azul, correspondiente a las condiciones iniciales $V_c(0) = 0$ con periodo 4 s.

SOLUCIÓN PROBLEMA 4

La solución general de la ecuación diferencial dada se puede obtener mediante el método de separación de variables.

a) La solución obtenida es

$$h(t) = \left(\sqrt{H} - \frac{\sqrt{\frac{g}{2}}A_h}{A_w} t \right)^2 .$$

El intervalo de existencia de la función $h(t)$ viene dado por

$$t \in \left[0, \frac{\sqrt{2H}A_w}{\sqrt{g}A_h} \right] .$$

b) Para obtener la solución resolvemos la ecuación $h(t) = 0$, con los datos de este apartado, obteniéndose $t \approx 30.0859$ minutos.

Este resultado lo podemos confirmar mediante el programa dfield, como podemos observar en la figura 9.

(a) **(b)**

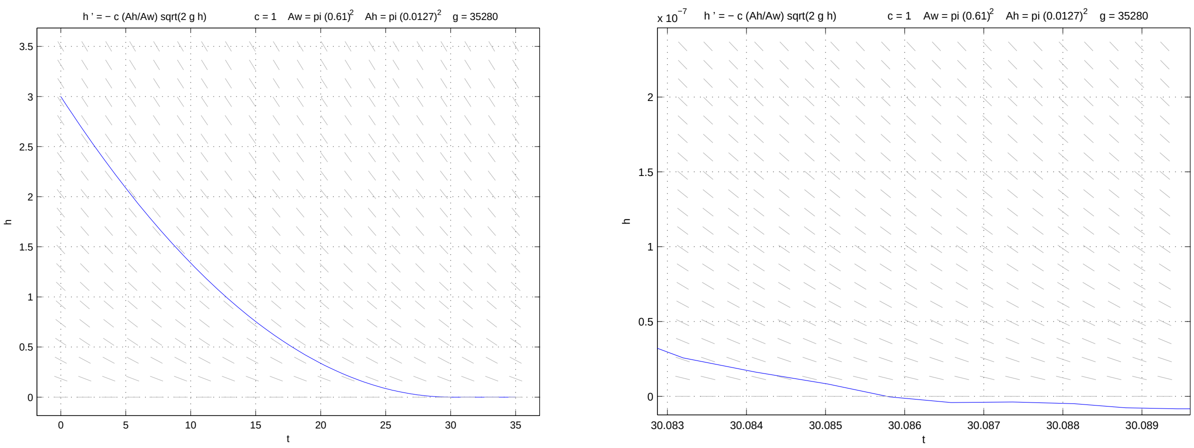

Figura 9: (a) Trayectoria correspondiente a las condiciones iniciales $h(0) = 3$. (b) Zoom de (a).

Si exportamos los datos de la solución se observa al analizar los mismos que para $t = 30.08584480049206$ es $h(t) = 0.00000000284767 > 0$, y para $t = 30.08660552002979 \quad h(t) = -0.00000000263386 < 0$.

Si tenemos en cuenta la fricción y la contracción del agua en el agujero, el tiempo que tarda en vaciarse el tanque es $t \approx 50.1432$ minutos.

En este caso, si exportamos los datos de la solución (obtenida utilizando el integrador Runge-Kutta de orden 4 con tamaño de paso 0.001), se observa que para $t = 50.14299999997384$ es $h(t) = 0.00000000011277 > 0$, y para $t = 50.14399999997384 \quad h(t) = -0.00000000076934 < 0$.