

Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales con Matlab: Sistemas de ecuaciones diferenciales

15 de abril de 2009

1. Un circuito eléctrico RLC está modelado por la ecuación (oscilador armónico)

$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = E(t), \quad (1)$$

donde R es la resistencia, L es la inductancia de la bobina, C la capacidad del condensador que almacena una carga $Q(t)$ y $E(t)$ una fuente de tensión que produce una intensidad $I(t)$.

- a) Probar que la ecuación anterior se puede escribir como

$$\begin{cases} \dot{Q}(t) = I(t), \\ \dot{I}(t) = F(t) - 2bI(t) - a^2Q(t), \end{cases} \quad (2)$$

donde a y b son constantes.

- b) Supongamos que la resistencia y la tensión son nulas $E(t) = R = 0$ (oscilador armónico no amortiguado). Hallar la solución general y el periodo de las soluciones. Para $a = 1, 2$, dibujar las trayectorias y la órbitas correspondientes a las condiciones iniciales $(Q(0) = 1, I(0) = 0)$ y $(Q(0) = 0, I(0) = 1)$. ¿Cómo varían la amplitud y la frecuencia de las soluciones? ¿Qué tipo de configuración presenta la solución de equilibrio?
- c) Supongamos que la la tensión es nula $E(t) = 0$ (oscilador armónico amortiguado). Hallar la solución general cuando $b > a$ (oscilador sobreamortiguado), $b = a$ (oscilador críticamente amortiguado) y $b < a$ (oscilador subamortiguado). ¿Qué ocurre en este último caso cuando $R \rightarrow 0$? Para $a = 1$ y $b = 2$, $a = b = 1$, $a = 2$ y $b = 1$ dibujar las trayectorias y la órbitas correspondientes a las condiciones iniciales $(Q(0) = 1, I(0) = 0)$ y $(Q(0) = 0, I(0) = 1)$. ¿Qué tipo de configuración presenta la solución de equilibrio en cada uno de los casos?
- d) En el caso $b = 1 < a = 2$ (oscilador subamortiguado) integrar numéricamente el sistema, usando los comandos de Matlab, en el intervalo $[0, \frac{6\pi}{\sqrt{3}}]$ para $(Q(0) = 1, I(0) = 0)$. ¿En qué valores la carga $Q(t)$ alcanza los valores máximos?
- e) Supongamos que $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ (oscilaciones forzadas) y $b < a$. Hallar la solución general. Para $a = 2$, $b = 1$, $F_0 = 1$ y $\omega = 2$ dibujar las trayectorias y las órbitas correspondientes a las condiciones iniciales $(Q(0) = 1, I(0) = 0)$ y $(Q(0) = 10, I(0) = 10)$. Dibujar algunas soluciones, comprobando el crecimiento de la amplitud de las oscilaciones, para valores de b y ω próximos a los valores de resonancia. Si $F(t) = e^{-bt} \cos(\omega t)$, ¿se produce resonancia?

2. La ecuación de Duffing

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + lx^3 = 0,$$

es un modelo de un sistema masa-resorte no lineal y no forzado.

- ¿Existe algún valor de los parámetros para los que el sistema anterior es un sistema hamiltoniano? En caso afirmativo encontrar la función hamiltoniana $H(x, y)$.
 - Consideremos el caso en el que $k = 16$, y $l = 4$. Calcular los puntos de equilibrio y clasificarlos. Usando el ordenador obtener el plano de fases correspondientes a diversas soluciones con diferentes constantes de amortiguación, $c = 0$ (caso no amortiguado) y $c = 1.4$ (caso amortiguado). Para dichas órbitas dibuja los diagramas t frente a x , así como t frente a y . ¿Qué diferencias observas entre el caso no amortiguado y el caso amortiguado?
 - Hacer lo mismo para el caso en el que $k = 16$, y $l = -4$. ¿Existen órbitas heteroclinas conectando dos equilibrios? Dibujar las variedades estables e inestables de los equilibrios tipo silla. Dibujar las curvas de nivel $H(x, y) = 15$ y $H(x, y) = 16$.
 - Considerar por último el caso en el que $k = -1$, y $l = 1$. Encontrar y clasificar todos los puntos de equilibrio para cada uno de los casos $c = 0$, y $c = 1$. ¿En qué caso existen órbitas homoclinas?
3. La ecuación del péndulo simple, sometido a la fuerza de la gravedad y despreciando la masa de la varilla frente a la masa total del mismo, viene dada por

$$ml\ddot{x} = -cl\dot{x} - mg\text{sen}(x),$$

donde $m > 0$ representa la masa, $l > 0$ la longitud del péndulo, $g > 0$ la aceleración de la gravedad y c el coeficiente de rozamiento.

- Probar, mediante un cambio de variable adecuado, que la ecuación anterior se puede escribir como

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\mu y - \text{sen}(x). \end{cases}$$

- Suponiendo que $\mu = 0$, es decir prescindimos de los efectos provocados por el rozamiento (caso no disipativo), hallar los puntos de equilibrio y la ecuación de las órbitas en el plano de fases. Dibujar las órbitas en el rectángulo $[-3\pi, 3\pi] \times [-3, 3]$ utilizando las curvas de nivel de la función energía con valores entre 0 y 4. Analizar los distintos tipos de movimiento. En el caso de soluciones periódicas, ¿dependen su amplitud y periodo de las condiciones iniciales? ¿A que tiende el periodo de la solución con condiciones iniciales $(x_0, 0)$ cuando hacemos tender $x_0 \rightarrow \pi$?
- Suponiendo que $\mu = 1 > 0$, es decir consideramos los efectos provocados por el rozamiento (caso disipativo) representa varias soluciones en el plano de fases, analizando la configuración de los distintos tipos de equilibrios presentes. Integra numéricamente la solución de la ecuación con condición inicial $(x(0), y(0)) = (0, 10)$ y representa en una gráfica la pérdida de energía con el tiempo. ¿Que ocurre cuando aumenta el coeficiente de rozamiento (tomar $\mu = 3$)?

4. El sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x^3, \\ \dot{y} = x, \end{cases}$$

es denominado sistema de Van der Pol, el cual surge en el estudio de circuitos con semiconductores no lineales, donde x representa la intensidad e y la carga.

- Variando el parámetro μ , en el intervalo $(0, 5)$, encuentra y clasifica los distintos tipos de puntos de equilibrio que existen.
- ¿Para qué valor del parámetro μ se produce una bifurcación de Hopf? Para $\mu = 1$, averiguar la estabilidad y el periodo de las órbitas periódicas existentes. Dibuja la trayectoria y la órbita correspondiente a la condición inicial $x(0) = 0, y(0) = 0,2$. Obtener también el diagrama de ambas componentes x, y frente al tiempo t . ¿Qué ocurre con esta curva solución cuando $t \rightarrow \infty$?

5. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 3(x^2 - y^2) + 2xy, \\ \dot{y} = x - 3y - 3(x^2 - y^2) + Axy, \end{cases}$$

donde A es un parámetro con $A \in [2.5 \ 3.5]$.

- Describir las bifurcaciones que se presentan cuando variamos A . Estudiar en cada caso los equilibrios y órbitas periódicas presentes, así como su estabilidad y dibujar el plano de fases.
- ¿Cómo desaparece, al aumentar el valor del parámetro A , el ciclo límite existente para $A=3$? ¿Entre qué valores de los parámetros (con error menor que una décima) ocurre una bifurcación homoclina?

6. Consideremos el sistema de Lorenz:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} = -\beta z + xy, \end{cases}$$

donde σ, ρ y β son constantes reales positivas.

- Calcular los equilibrios del sistema y hallar la estabilidad del origen. ¿Que bifurcación experimenta el origen al pasar por el valor $\rho = 1$?
- Siendo $\sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}$ y $\rho = 28$ obtener, en el intervalo $[0, 40]$, las soluciones correspondientes a las condiciones iniciales en $t = 0$ dadas por $(5, 5, 30)$ y $(5.001, 5, 30)$. Para observar la dependencia sensible de las soluciones del sistema con respecto a las condiciones iniciales, representar t frente a x, y ó z para ambas soluciones.
- Investigar el comportamiento del sistema dado con los valores de σ y β del apartado anterior, y $\rho = 0.8, \rho = 1, \rho = 20$.

Soluciones

SOLUCIÓN PROBLEMA 1

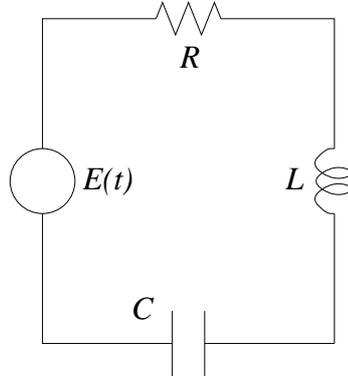


Figura 1: Esquema de un circuito eléctrico RLC

En la figura 1 vemos una representación estándar de un circuito RLC , modelado por la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes (1). Estamos interesados en conocer la carga $Q(t)$ y la intensidad $I(t)$ en cualquier instante.

La ecuación diferencial (1) modela también las oscilaciones horizontales del sistema mecánico compuesto por un objeto de masa m , conectado a una pared mediante un resorte o muelle (de constante $k > 0$ que mide la rigidez del muelle), que se mueve sobre una superficie que opone una resistencia (de constante $c > 0$ dependiendo del medio o mecanismo de amortiguación) al desplazamiento $x(t)$, debida al rozamiento. En este caso la ecuación, para hallar la posición del objeto $x(t)$ y su velocidad $\dot{x}(t)$, sería

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = E(t), \quad (3)$$

donde $E(t)$ es una fuerza externa que se aplica al objeto.

a) Dividiendo la ecuación (1) por L se llega a

$$Q\ddot{(t)} + 2bQ\dot{(t)} + a^2Q(t) = F(t), \quad (4)$$

donde $b = \frac{R}{2L} \geq 0$, $a = (LC)^{-1/2} > 0$ y $F(t) = \frac{E(t)}{L} \geq 0$. Introduciendo la variable $I(t)$, dado que $I(t) = \dot{Q}(t)$, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (2) del apartado (a)

$$\begin{cases} Q\dot{(t)} = I(t), \\ I\dot{(t)} = F(t) - 2bI(t) - a^2Q(t). \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la relación existente entre los coeficientes de las ecuaciones (1) y (3), los valores de las constantes en el sistema mecánico son $b = \frac{c}{2m} \geq 0$, $a = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$ y $F(t) = \frac{E(t)}{m} \geq 0$.

b) Si suponemos que las oscilaciones son libres y no amortiguadas, es decir en el circuito la tensión y la resistencia son nulas (en el sistema mecánico no se aplica fuerza externa sobre el objeto de masa m y no hay amortiguamiento), es $F(t) = 0$ y $b = 0$. En este caso el sistema de ecuaciones diferenciales lineal y homogéneo (2) es autónomo, y tiene un único punto de equilibrio $(Q(t), I(t)) = (0, 0)$.

Al resolver la ecuación característica $\lambda^2 + a^2 = 0$ de la ecuación (4), obtenemos los autovalores ($\lambda = \pm ai$) y a partir de ellos la solución general de la misma $Q(t) = c_1 \cos(at) + c_2 \operatorname{sen}(at)$. Notemos que al ser los autovalores imaginarios puros el equilibrio $(Q(t), I(t)) = (0, 0)$ es un centro. Las soluciones obtenidas son periódicas, de periodo $T = \frac{2\pi}{a}$ y frecuencia $f = \frac{a}{2\pi}$. Se deduce por tanto que el periodo y la frecuencia de las soluciones dependen de a , es decir de las características físicas del sistema, pero no de las condiciones iniciales. Notemos que estas soluciones se pueden escribir en la forma $Q(t) = A \cos(at + \alpha)$ donde $c_1 = A \cos \alpha$, $c_2 = -A \operatorname{sen} \alpha$, y la amplitud de las soluciones viene dada por $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. En consecuencia la amplitud de las soluciones sólo depende de las condiciones iniciales, es decir de los valores de la carga y la intensidad iniciales $(Q(0), I(0))$ (posición y velocidad iniciales en el sistema mecánico). Teniendo en cuenta que $I(t) = \dot{Q}(t) = -ac_1 \operatorname{sen}(at) + ac_2 \cos(at)$, las trayectorias del sistema (2) vienen dadas, en función de las condiciones iniciales $(Q(0), I(0))$, por las ecuaciones

$$\begin{cases} Q(t) = Q(0)\cos(at) + \frac{I(0)}{a}\operatorname{sen}(at), \\ I(t) = I(0)\cos(at) - aQ(0)\operatorname{sen}(at). \end{cases} \quad (5)$$

Eliminando la variable t del sistema anterior obtendremos las ecuaciones de las órbitas del sistema (2). Para ello expresamos la intensidad $I(t)$ en la forma $I(t) = \dot{Q}(t) = -aA \operatorname{sen}(at + \alpha)$, de donde se deduce que $\frac{I(t)}{a} = -A \operatorname{sen}(at + \alpha)$. Por tanto obtenemos como ecuación de las órbitas

$$Q(t)^2 + \left(\frac{I(t)}{a}\right)^2 = A^2 \Leftrightarrow \frac{Q(t)^2}{A^2} + \frac{I(t)^2}{(aA)^2} = 1.$$

Se trata por tanto de elipses con centro en $(0, 0)$ y de semiejes A (amplitud de la oscilación para $Q(t)$) y aA (amplitud de la oscilación para $I(t)$). Esto confirma la configuración de tipo centro entorno al punto de equilibrio $(Q(t), I(t)) = (0, 0)$.

Finalmente vamos a dibujar para $a = 1, 2$, mediante el programa "plane", las trayectorias y las órbitas correspondientes a las condiciones iniciales $(Q(0) = 1, I(0) = 0)$ y $(Q(0) = 0, I(0) = 1)$. Notemos que de acuerdo a nuestro calculos anteriores en ambos casos se obtienen como trayectorias las ecuaciones de una hélice circular (ver figuras 2a y 3a). Cuando $a = 1$ las dos órbitas coinciden y se trata de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1 (ver figura 2b), mientras que en el caso $a = 2$ se obtiene dos elipses diferentes, si bien en la figura 3b hemos representado sólo una de ellas. También podemos ver en la figura 4 la evolución en el tiempo, $t \in [0, 4\pi]$, de la carga $Q(t)$ y la intensidad $I(t)$ correspondiente a las condiciones iniciales $(Q(0) = 1, I(0) = 0)$ en ambos casos ($a = 1, 2$). Estas representaciones gráficas nos confirma lo deducido en los cálculos teóricos, en relación al período y la amplitud de las soluciones.

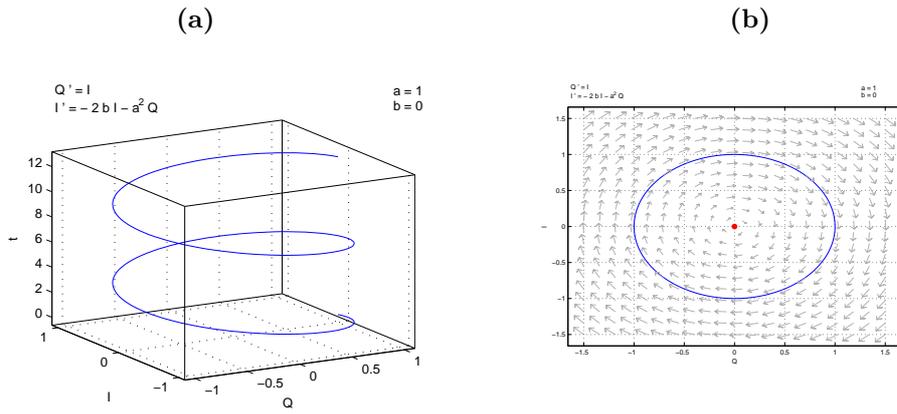


Figura 2: Para $a = 1, b = 0$ y las condiciones iniciales $(Q(0), I(0)) = (1, 0)$: (a) Trayectoria. (b) Órbita.

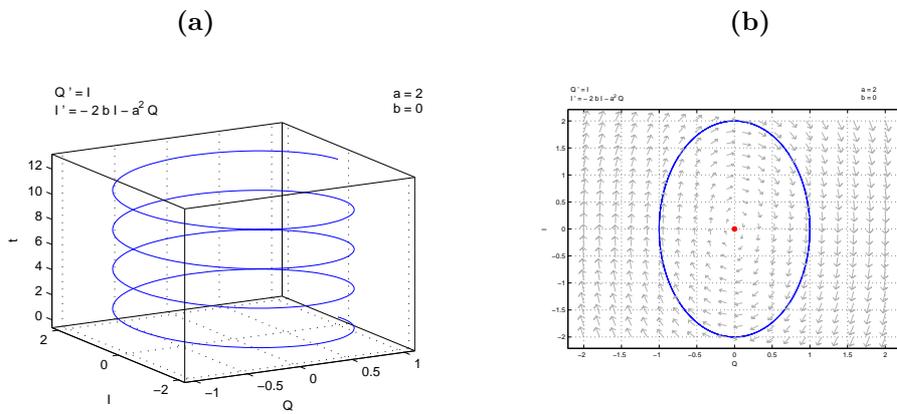


Figura 3: Para $a = 2, b = 0$ y las condiciones iniciales $(Q(0), I(0)) = (1, 0)$: (a) Trayectoria. (b) Órbita.

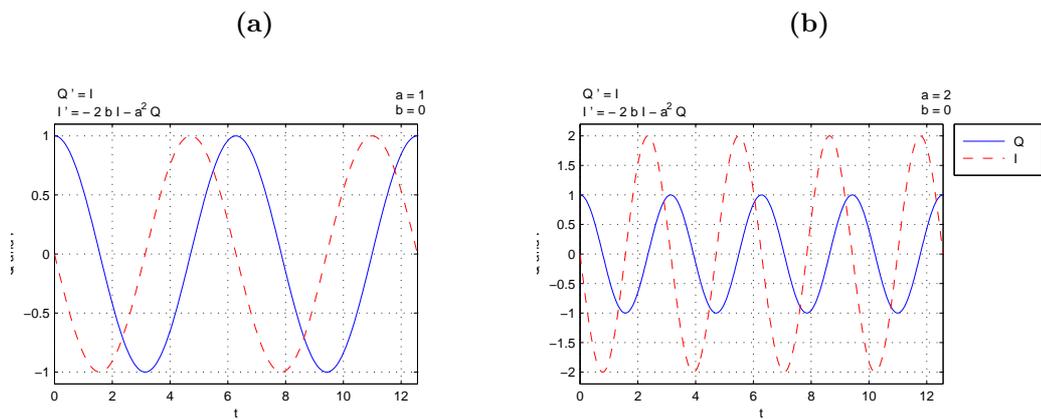


Figura 4: Para las condiciones iniciales $(Q(0), I(0)) = (1, 0)$, onda temporal t frente a Q (color azul) e I (color rojo): (a) Cuando $a = 1, b = 0$. (b) Cuando $a = 2, b = 0$.

- c) Si suponemos que las oscilaciones son libres y amortiguadas, es decir en el circuito la tensión es nula, pero no la resistencia (en el sistema mecánico no se aplica fuerza externa sobre el objeto de masa m , pero si hay una resistencia del medio al movimiento), es $F(t) = 0$ y $b > 0$. En este caso el sistema de ecuaciones diferenciales lineal y homogéneo (2) sigue siendo autónomo, y tiene un único punto de equilibrio $(Q(t), I(t)) = (0, 0)$. Al resolver la ecuación característica $\lambda^2 + 2b\lambda + a^2 = 0$ de la ecuación (4), obtenemos los autovalores $(\lambda = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2})$, por lo que se presentan tres casos:

Caso 1º $\mathbf{b > a}$ (Movimiento sobreamortiguado).

En este caso $b^2 - a^2 > 0$ y como $\sqrt{b^2 - a^2} < b$, los dos autovalores son reales y negativos. Como consecuencia el equilibrio presenta una configuración de tipo nodo asintóticamente estable. A partir de ellos se obtiene la solución general de la ecuación (4), a saber $Q(t) = c_1 e^{(-b + \sqrt{b^2 - a^2})t} + c_2 e^{(-b - \sqrt{b^2 - a^2})t}$. Teniendo en cuenta que $I(t) = \dot{Q}(t)$, las trayectorias del sistema (2), para este caso, vienen dadas por las ecuaciones

$$\begin{cases} Q(t) = c_1 e^{(-b + \sqrt{b^2 - a^2})t} + c_2 e^{(-b - \sqrt{b^2 - a^2})t}, \\ I(t) = c_1(-b + \sqrt{b^2 - a^2})e^{(-b + \sqrt{b^2 - a^2})t} + c_2(-b - \sqrt{b^2 - a^2})e^{(-b - \sqrt{b^2 - a^2})t}. \end{cases} \quad (6)$$

Es fácil comprobar que estas soluciones no tienen oscilación alguna y cumplen que $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$, se deduce por tanto que cuando partimos de unas condiciones iniciales $(Q(0), I(0)) \neq (0, 0)$ la carga y la intensidad (el objeto de masa m y su velocidad) regresan a la posición de equilibrio, de manera asintótica como una función exponencial, debido al fuerte amortiguamiento.

Finalmente vamos a dibujar para $a = 1, b = 2$, mediante el programa "ppplane", las trayectorias y las órbitas correspondientes a las condiciones iniciales del enunciado. En particular en la figura 5a hemos representado la trayectoria de la solución correspondiente a la condición inicial $(Q(0) = 1, I(0) = 0)$, mientras que en la figura 5b aparecen las órbitas de las soluciones correspondientes a las dos condiciones iniciales del enunciado. Por último en la figura 6 hemos representado la evolución en el tiempo, $t \in [0, 20]$, de la carga $Q(t)$ y la intensidad $I(t)$ correspondiente a las condiciones iniciales $(Q(0) = 1, I(0) = 0)$ y $(Q(0) = 0, I(0) = 1)$. Estas representaciones gráficas nos confirma lo deducido en los cálculos teóricos.

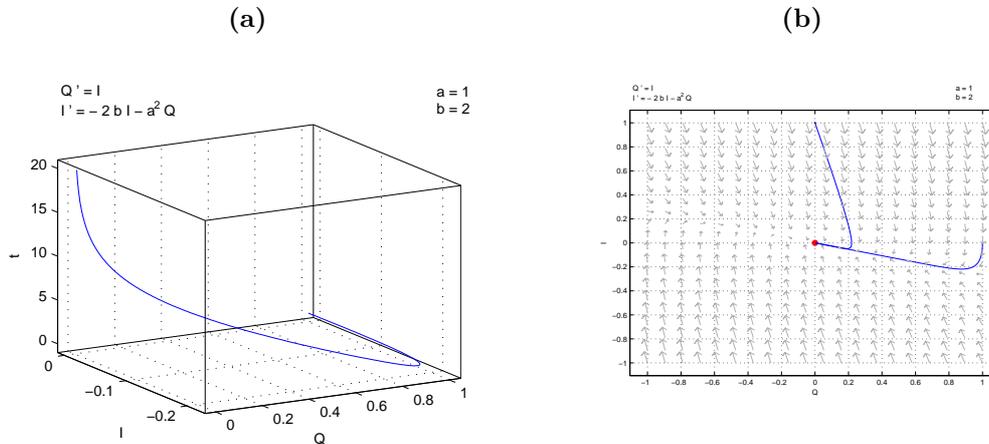


Figura 5: Para $a = 1, b = 2$: (a) Trayectoria correspondiente a la condición inicial $(Q(0), I(0)) = (1, 0)$. (b) Órbitas correspondiente a las condiciones iniciales $(Q(0), I(0)) = (1, 0)$ y $(Q(0), I(0)) = (0, 1)$.

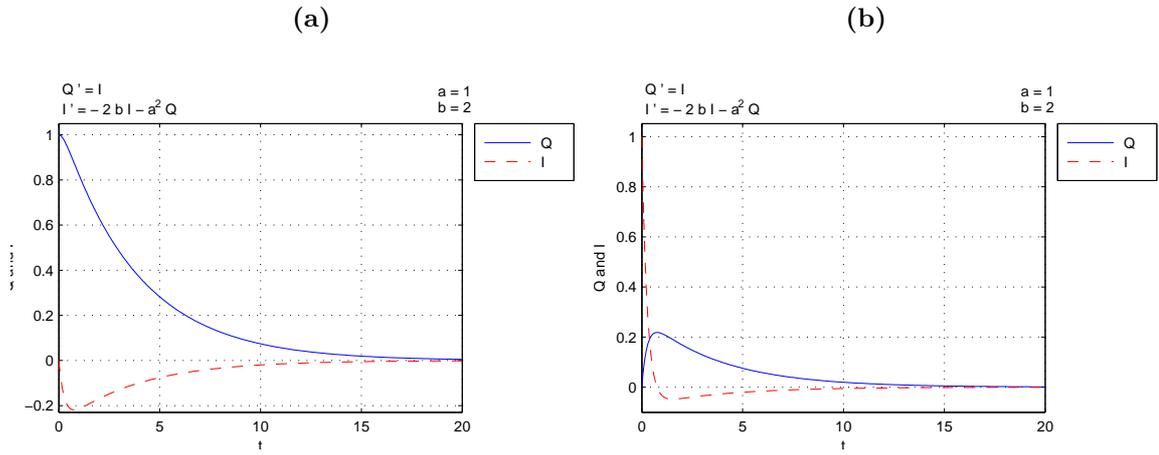


Figura 6: Para $a = 1, b = 2$, onda temporal t frente a Q (color azul) e I (color rojo) de la solución correspondiente a las condiciones iniciales: (a) $(Q(0), I(0)) = (1, 0)$. (b) $(Q(0), I(0)) = (0, 1)$.

Caso 2° $b = a$ (Movimiento críticamente amortiguado).

En este caso hay un único autovalor real doble que es negativo $\lambda = -b < 0$. Como consecuencia el equilibrio es un nodo impropio asintóticamente estable. A partir de ellos se obtiene la solución general de la ecuación (4), a saber $Q(t) = c_1 e^{-bt} + c_2 t e^{-bt}$. Teniendo en cuenta que $I(t) = \dot{Q}(t)$, las trayectorias del sistema (2), para este caso, vienen dadas por las ecuaciones

$$\begin{cases} Q(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-bt}, \\ I(t) = [-c_1 b + c_2(1 - bt)]e^{-bt}. \end{cases} \quad (7)$$

Es fácil comprobar que estas soluciones tampoco tienen oscilación alguna y cumplen que $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$; se deduce por tanto que las soluciones tienen las características descritas en el caso anterior, como podemos observar en la figura 7. Este caso es una situación límite entre el movimiento no oscilatorio anterior y el movimiento oscilatorio que veremos en el caso tercero.

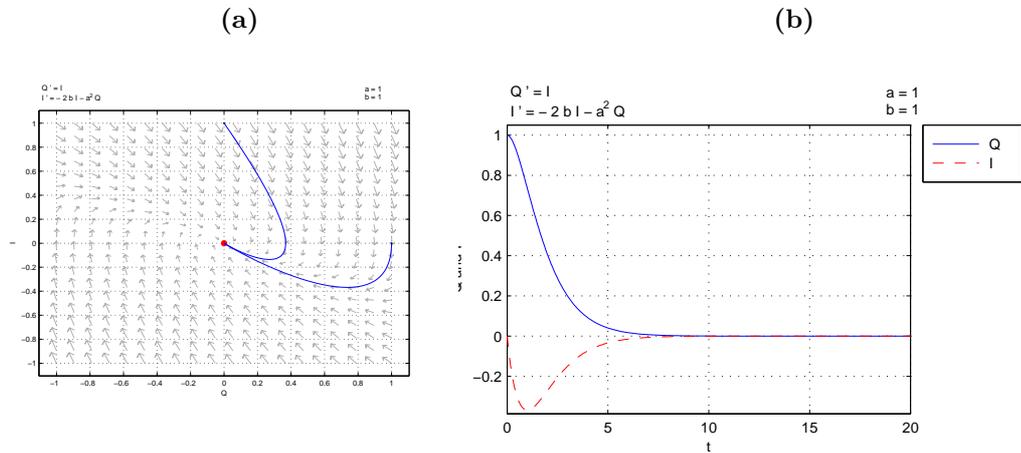


Figura 7: Para $a = 1, b = 1$: (a) Órbitas correspondiente a las condiciones iniciales $(Q(0), I(0)) = (1, 0)$ y $(Q(0), I(0)) = (0, 1)$. (b) Onda temporal t frente a Q (color azul) e I (color rojo), de la solución correspondiente a la condición inicial $(Q(0), I(0)) = (1, 0)$.

Caso 3° $\mathbf{b < a}$ (Movimiento subamortiguado).

En este caso $b^2 - a^2 < 0$ y los dos autovalores son complejos conjugados con parte real negativa $\lambda = -b \pm i\sqrt{a^2 - b^2}$. Como consecuencia el equilibrio presenta una configuración de tipo foco estable. A partir de ellos se obtiene la solución general de la ecuación (4), a saber $Q(t) = e^{-bt}[c_1 \cos(\sqrt{a^2 - b^2} t) + c_2 \text{sen}(\sqrt{a^2 - b^2} t)]$. Teniendo en cuenta que $I(t) = \dot{Q}(t)$, obtendríamos las ecuaciones de las trayectorias del sistema (2) para este caso. Notemos que, de manera análoga a lo realizado en el apartado b) del problema, la solución $Q(t)$ podría expresarse como

$$Q(t) = Ae^{-bt} \cos(\sqrt{a^2 - b^2} t + \alpha), \quad (8)$$

donde $c_1 = A \cos \alpha$, $c_2 = -A \text{sen} \alpha$, y por tanto $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$.

En este caso el movimiento no es periódico, pero si es de carácter oscilatorio. En efecto, la gráfica de la función $Q(t)$ cruza la posición de equilibrio $Q(t) = 0$ a intervalos regulares. Además la amplitud de las oscilaciones Ae^{-bt} decrece exponencialmente con el tiempo y como en los casos anteriores todas las soluciones cumplen que $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$, si bien esa convergencia ahora es más lenta y se dice que el movimiento está subamortiguado.

Si consideramos como período T el tiempo necesario para que la curva solución complete una oscilación tenemos que $T = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$. La frecuencia de estas oscilaciones $f = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2\pi}$, dado que $\sqrt{a^2 - b^2} < a$, es menor que la frecuencia natural o propia del sistema $f = \frac{a}{2\pi}$ (la obtenida en el apartado b)) cuanto mayor sea el valor de b , es decir la resistencia del circuito R (la resistencia del medio al movimiento medida por el valor de c). En consecuencia cuando $R \rightarrow 0 \Rightarrow b \rightarrow 0$ y la frecuencia de las soluciones se va pareciendo a la frecuencia natural del sistema obtenida en el apartado b).

Finalmente vamos a dibujar para $a = 2, b = 1$, mediante el programa "pplane", las trayectorias y las órbitas correspondientes a las condiciones iniciales del enunciado. En particular en la figura 8a hemos representado la trayectoria de la solución correspondiente a la condición inicial ($Q(0) = 1, I(0) = 0$), mientras que en la figura 8b aparecen las órbitas de las soluciones correspondientes a las dos condiciones iniciales del enunciado. Por último en la figura 9 hemos representado la evolución en el tiempo, $t \in [0, 20]$, de la carga $Q(t)$ y la intensidad $I(t)$ correspondiente a las condiciones iniciales ($Q(0) = 1, I(0) = 0$) y ($Q(0) = 0, I(0) = 1$). Estas representaciones gráficas nos confirma lo deducido en los cálculos teóricos.

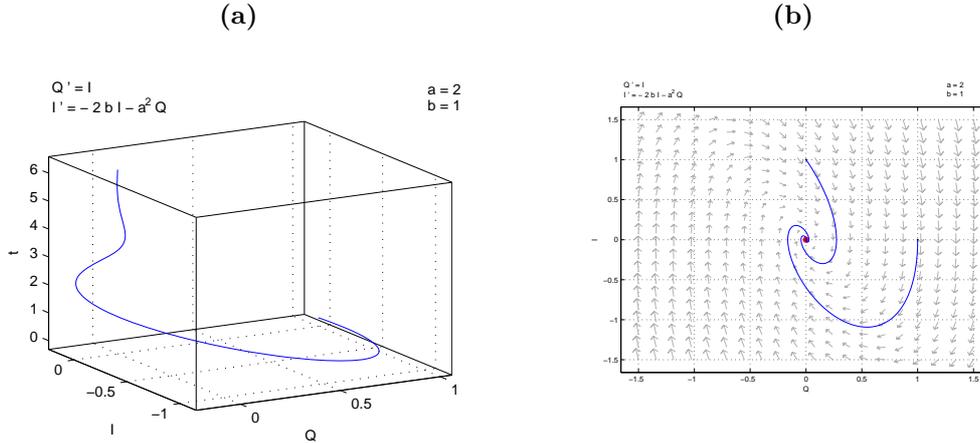


Figura 8: Para $a = 2, b = 1$: (a) Trayectoria correspondiente a la condición inicial $(Q(0), I(0)) = (1, 0)$. (b) Órbitas correspondiente a las condiciones iniciales $(Q(0), I(0)) = (1, 0)$ y $(Q(0), I(0)) = (0, 1)$.

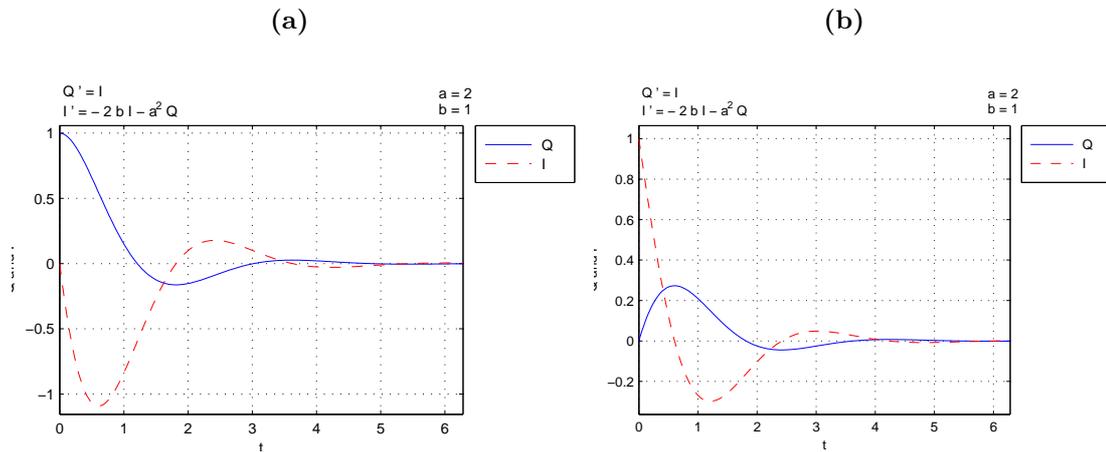


Figura 9: Para $a = 2, b = 1$, onda temporal t frente a Q (color azul) e I (color rojo) de la solución correspondiente a las condiciones iniciales: (a) $(Q(0), I(0)) = (1, 0)$. (b) $(Q(0), I(0)) = (0, 1)$.

- d) Para realizar la integración numérica, primero guardamos el sistema a integrar en el fichero `ftysis.m` que listamos a continuación

```
function Z=ftysis(t,E)
Q=E(1); I=E(2);
Z=[I, -2*I-4*Q]';
```

y posteriormente ejecutamos el comando "`ode45`" directamente, o bien generamos un fichero `ode45sistema.m` donde está incluido el mismo; si bien es este caso hemos impuesto que el tamaño de paso h sea fijo.

```
function S=ode45sistema(ftysis,a,b,Za,M)
%
% Datos de entrada
% ftysis es la funcion, almacenada como una cadena de caracteres
% a y b son los extremos del intervalo
% Za=[x1(a),...,xn(a)] es la condición inicial
% M es el número de pasos
%
% Datos de salida
% S=[T X] donde T es el vector con las abscisas y
% X=[x1(t),...,xn(t)] es el vector con las ordenadas
%
h=(b-a)/M;
T=a:h:b;
[T X]=ode45(ftysis,T,Za);
format long
S=[T X];
```

Los resultados pedidos se obtienen ejecutando, en la ventana de comandos, la instrucción

```
>> S=ode45sistema('ftysis',0,6*pi/sqrt(3),[1 0],60)
```

A continuación, para nuestro caso $T = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, mostramos únicamente los valores correspondientes a $t = 0, T, 2T, 3T$, que corresponden a los valores donde la carga $Q(t)$ es máxima (el desplazamiento es maximo, con respecto a la posición de equilibrio $x(t) = 0$, del objeto de masa m). Notar que al ser $h = \frac{3T}{M}$, si tomamos $M = 60$ pasos, se tiene que $T = 20h$ y por tanto los valores anteriores de t se alcanzaran en las filas 21, 41 y 61 de la matriz S . En dicha tabla se observa como los valores máximos de $Q(t)$ (amplitud de las oscilaciones) van disminuyendo con el tiempo.

| t | $Q(t)$ | $I(t)$ |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| 0 | 1.000000000000000 | 0.000000000000000 |
| 3.62759872846844 | 0.02658095633112 | 0.00005375088281 |
| 7.25519745693687 | 0.00070636679199 | 0.00000280934965 |
| 10.88279618540531 | 0.00001874112560 | 0.00000033872526 |

Cuadro 1: Valores máximos de la carga $Q(t)$

Los valores de la matriz S nos permiten verificar numéricamente que se cumple, para $i = 1, 2, 3, \dots$, la relación $\frac{Q(T_i)}{Q(T_{i+1})} = e^{bT}$. Justificarlo teóricamente a partir de la igualdad (8).

- e) Dado que en cualquier proceso oscilatorio real siempre está presente algún tipo de amortiguamiento, si queremos conseguir oscilaciones no amortiguadas, debemos añadir alguna fuerza externa que compense la perdida de energía debida a la fuerza de amortiguamiento. En este caso supondremos que la fuerza electromotriz $E(t)$ es no nula (en el sistema mecánico una fuerza externa $E(t)$ actúa sobre el objeto de masa m), lo que da lugar a oscilaciones forzadas. Uno de los caso más importantes se presenta cuando dicha fuerza es una función periódica de la forma $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, de amplitud F_0 y frecuencia $f = \frac{\omega}{2\pi}$, quedando la ecuación (4) en la forma

$$Q''(t) + 2bQ'(t) + a^2Q(t) = F_0 \cos(\omega t).$$

Como conocemos la solución general de la ecuación homogénea, que suponemos tiene movimiento subamortiguado (caso 3° del apartado c)), para hallar una solución particular de la ecuación completa ensayamos, mediante el método de los coeficientes indeterminados, con la función $Q(t) = B \sin(\omega t) + C \cos(\omega t)$. Al imponer que cumpla la ecuación anterior se obtiene

$$B = \frac{2bF_0\omega}{(a^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}, \quad C = \frac{(a^2 - \omega^2)F_0}{(a^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2},$$

quedando la particular

$$S_p(t) = \frac{F_0}{(a^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} [2b\omega \sin(\omega t) + (a^2 - \omega^2) \cos(\omega t)].$$

Utilizando un razonamiento similar a los anteriores, esta solución particular se puede escribir

$$S_p(t) = A \cos(\omega t - \alpha),$$

donde $\frac{2b\omega F_0}{(a^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} = -A \sin \alpha$, $\frac{(a^2 - \omega^2)F_0}{(a^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} = A \cos \alpha$, y por tanto $A = \frac{F_0}{\sqrt{(a^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}$.

En consecuencia la solución general, para este caso, es

$$Q(t) = e^{-bt} \left(c_1 \cos(\sqrt{a^2 - b^2}t) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{a^2 - b^2}t) \right) + \frac{F_0}{\sqrt{(a^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \cos(\omega t - \alpha).$$

Como se observa todas las soluciones aparecen como suma de dos términos. El primer sumando (la solución general de la ecuación homogénea), recoge la influencia de las condiciones iniciales y sabemos que tiende a cero cuando $t \rightarrow +\infty$, por tanto este sumando (parte transitoria) va desapareciendo con el paso del tiempo y la solución se parecerá cada vez más al segundo sumando (parte estacionaria), que representa el comportamiento a largo plazo con el que el sistema responde a la fuerza externa $F(t)$. Este sumando representa un movimiento periódico de período $T = \frac{2\pi}{\omega}$, y su frecuencia $f = \frac{\omega}{2\pi}$ coincide con la de la fuerza externa $F(t)$, siendo la amplitud de la oscilación de la parte estacionaria $A = \frac{F_0}{\sqrt{(a^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}$.

Como se observa la amplitud depende no solo de ω y F_0 , sino también de a y b , es decir de R , L , C . Por tanto, si $b \rightarrow 0$ ($R \rightarrow 0$ ó $c \rightarrow 0$), es decir se trata de un movimiento ligeramente amortiguado y $\omega \rightarrow a$ ($\omega \rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}}$ o $\omega \rightarrow \sqrt{\frac{K}{M}}$), es decir la frecuencia $\frac{\omega}{2\pi}$ de la fuerza externa $F(t)$ es próxima a

la frecuencia del sistema en el caso subamortiguado $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$, entonces la amplitud de la oscilación correspondiente a la parte estacionaria de la solución es muy grande y aparece el fenómeno de la resonancia.

Para verificar numericamente lo anterior utilizamos el programa "odesolve" con $a = 2, b = 1, F_0 = 1$ y $\omega = 2$, donde hemos añadido una tercera ecuación auxiliar al sistema (2), obteniéndose el nuevo sistema no autónomo

$$\begin{cases} \dot{Q}(t) = I(t), \\ \dot{I}(t) = F(t) - 2I(t) - 4Q(t), \\ \dot{F}(t) = -2\operatorname{sen}(2t). \end{cases} \quad (9)$$

En la figura 10 (figura 11) representamos las trayectorias (órbitas), correspondientes a las condiciones iniciales ($Q(0) = 1, I(0) = 0, F(0) = F_0 = 1$) y ($Q(0) = 10, I(0) = 10, F(0) = 1$), mientras que en la figura 12 hemos representado la evolución en el tiempo, $t \in [0, 20]$, de la carga $Q(t)$, la intensidad $I(t)$ y la fuerza externa $F(t)$, correspondiente a las condiciones iniciales anteriores. Estas representaciones gráficas nos confirman lo deducido en los cálculos teóricos. Recordemos que al ser un sistema no autónomo las órbitas pueden cortarse en el plano de fases.

Para verificar como crece la amplitud de las oscilaciones cuando los valores de b y ω son próximos a los valores de resonancia hemos representado en la figura 13 (figura 14) las trayectorias (órbitas) para $b = 0.1$ y $\omega = 1.9$ ($b = 0.01$ y $\omega = 1.9$), correspondiente a la condición inicial ($Q(0) = 1, I(0) = 0, F(0) = F_0 = 1$). Por último en la figura 15 hemos representado la evolución en el tiempo, con $t \in [0, 20\pi]$, de la carga $Q(t)$, la intensidad $I(t)$ y la fuerza externa $F(t)$, correspondiente a la condición inicial anterior en ambos casos.

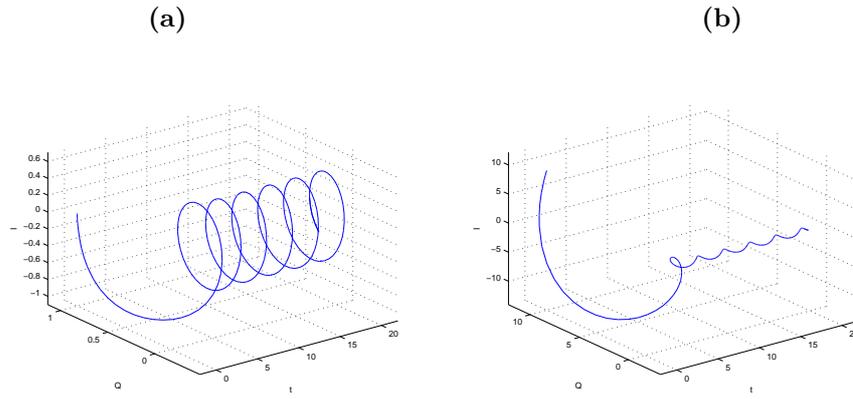


Figura 10: Para $a = 2, b = 1, F_0 = 1, \omega = 2$, trayectorias para las condiciones iniciales: (a) $(Q(0), I(0), F(0)) = (1, 0, 1)$. (b) $(Q(0), I(0), F(0)) = (10, 10, 1)$.

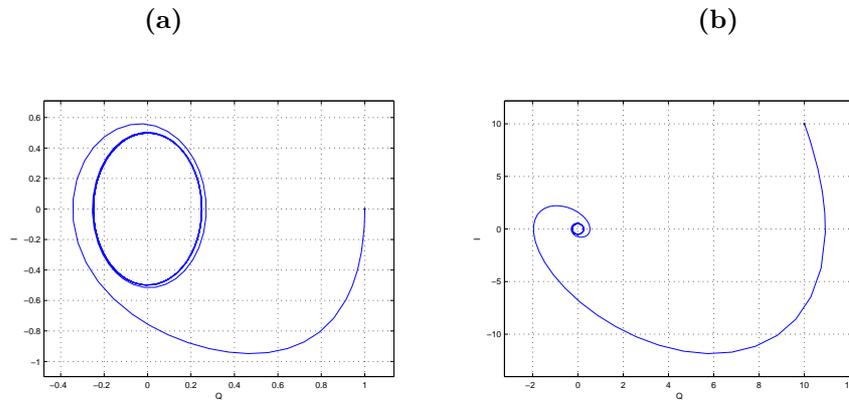


Figura 11: Para $a = 2, b = 1, F_0 = 1, \omega = 2$, órbitas para las condiciones iniciales: (a) $(Q(0), I(0), F(0)) = (1, 0, 1)$. (b) $(Q(0), I(0), F(0)) = (10, 10, 1)$.

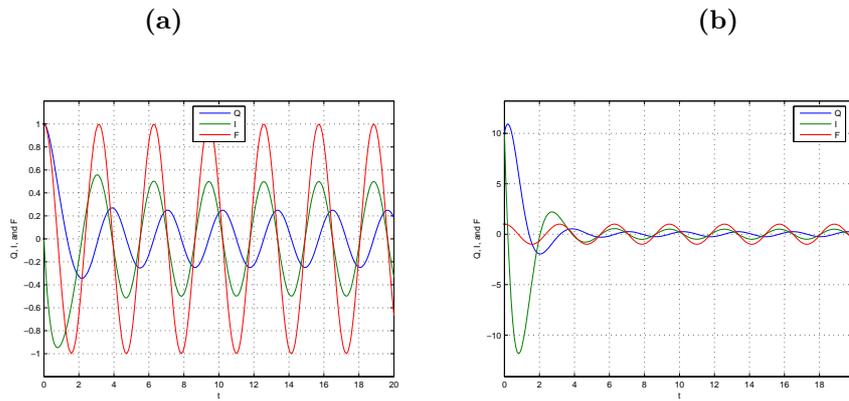


Figura 12: Para $a = 2, b = 1, F_0 = 1, \omega = 2$, onda temporal t frente a Q (color azul), I (color verde) y F (color rojo) para las condiciones iniciales: (a) $(Q(0), I(0), F(0)) = (1, 0, 1)$. (b) $(Q(0), I(0), F(0)) = (10, 10, 1)$.

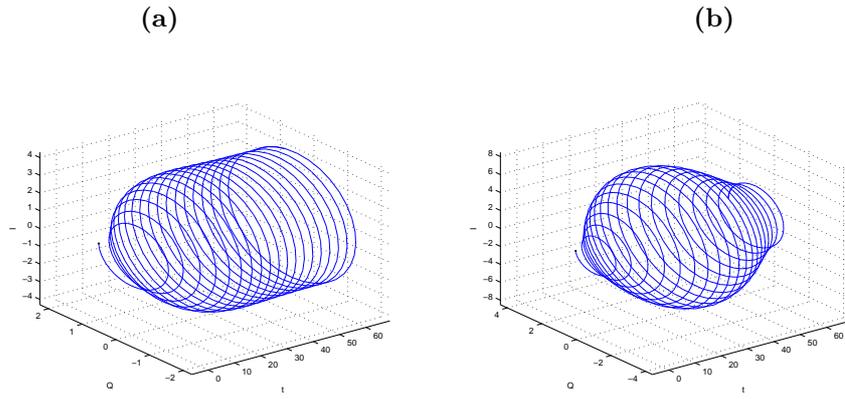


Figura 13: Para $a = 2, F_0 = 1, \omega = 1.9$, trayectorias para las condiciones iniciales $(Q(0), I(0), F(0)) = (1, 0, 1)$ con: (a) $b = 0.1$. (b) $b = 0.01$.

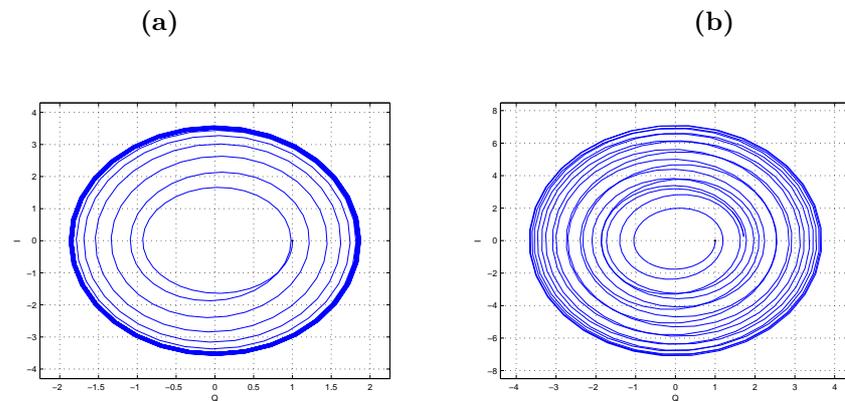


Figura 14: Para $a = 2, F_0 = 1, \omega = 1.9$, órbitas para las condiciones iniciales $(Q(0), I(0), F(0)) = (1, 0, 1)$ con: (a) $b = 0.1$. (b) $b = 0.01$.

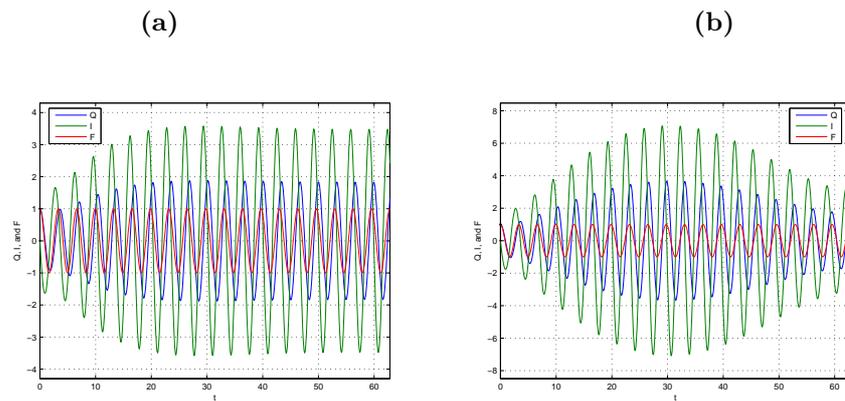


Figura 15: Para $a = 2, F_0 = 1, \omega = 1.9$, onda temporal t frente a Q (color azul), I (color verde) y F (color rojo) para la condición inicial $(Q(0), I(0), F(0)) = (1, 0, 1)$ con: (a) $b = 0.1$. (b) $b = 0.01$.

SOLUCIÓN PROBLEMA 3

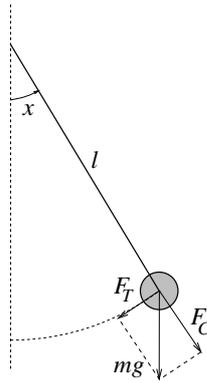


Figura 16: Péndulo matemático.

Consideremos el péndulo de la figura (16), en el que suponemos que toda la masa del péndulo m está concentrada en la pesa, es decir despreciamos la masa de la varilla de longitud l . El otro extremo de la varilla está fijado a una barra, de manera que el péndulo puede girar un círculo completo en un plano perpendicular al suelo y suponemos que sólo hay dos fuerzas actuando sobre el péndulo: la gravedad y la fricción, siendo esta última fuerza proporcional, con constante de proporcionalidad $c > 0$, a la velocidad de la pesa. Representamos por $x(t)$ el ángulo formado por la varilla con la vertical en cada instante t , medido en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Aplicando la segunda ley de Newton obtenemos

$$m l \frac{d^2 x}{dt^2} = -c l \frac{dx}{dt} - m g \operatorname{sen}(x). \quad (10)$$

Observar que el primer sumando del segundo término de la ecuación (10), que se debe al rozamiento, representa una amortiguación (término disipativo) mientras que el segundo sumando se debe a la fuerza de la gravedad.

- a) Al objeto de reducir el número de casos a estudiar en un sistema físico, disminuyendo el número de parámetros, hacemos un cambio de escala de forma que la ecuación obtenida este adimensionalizada en los nuevos parámetros.

Para ello dividimos toda la ecuación (10) por ml quedando

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{c}{m} \frac{dx}{dt} - \frac{g}{l} \operatorname{sen}(x).$$

Ahora mediante el cambio $T = \sqrt{\frac{g}{l}} t$ se obtiene

$$\frac{g}{l} \frac{d^2 x}{dT^2} = -\frac{c}{m} \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{dx}{dT} - \frac{g}{l} \operatorname{sen}(x).$$

Multiplicando por $\frac{l}{g}$ y llamando $\mu = \frac{c}{m} \sqrt{\frac{l}{g}}$, la ecuación obtenida

$$\frac{d^2 x}{dT^2} = -\mu \frac{dx}{dT} - \operatorname{sen}(x),$$

está adimensionalizada al no tener dimensión el único parámetro μ . Finalmente escribimos la ecuación diferencial de segundo orden obtenida como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\mu y - \text{sen}(x). \end{cases} \quad (11)$$

- b) Si suponemos el caso ideal donde no hay fricción, y por tanto $c = 0 \Rightarrow \mu = 0$, el sistema dinámico resultante es un sistema conservativo plano, ya que al no haber disipación la energía total del sistema E (suma de la energía cinética y la energía potencial) se mantiene constante. El sistema (11) queda

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\text{sen}(x). \end{cases} \quad (12)$$

Los puntos de equilibrio son $(k\pi, 0)$, con $k \in \mathbb{Z}$. En los correspondientes a múltiplos pares de π ($x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$) la pesa cuelga sin movimiento en posición vertical, los múltiplos impares ($x = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$) corresponden a la otra posición de equilibrio del péndulo ideal donde la pesa también se encuentra en posición vertical sin movimiento, pero girada un ángulo de π radianes en relación a la anterior posición.

Para integrar el sistema (12), al objeto de encontrar la ecuación de las órbitas en el plano de fases, eliminamos dT dividiendo ambas ecuaciones

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\text{sen}(x)}{y},$$

y suponiendo que $(x(0) = 0, y(0) = 0)$, nivel 0 de la energía, se obtiene la solución $E = \frac{y^2}{2} + 1 - \cos(x)$.

Notemos que el primer sumando $\frac{y^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dT} \right)^2$ corresponde a la energía cinética del sistema dinámico y $1 - \cos(x)$ es la energía potencial.

El sistema (12) es un sistema hamiltoniano y la función de energía E es la función hamiltoniana, ya que

$$\frac{dx}{dT} = f(x, y) = \frac{\partial E}{\partial y} = y, \quad \frac{dy}{dT} = g(x, y) = -\frac{\partial E}{\partial x} = -\text{sen}(x).$$

Es fácil probar que la energía total E se conserva para cada solución $(x(t), y(t))$ comprobando que

$$\frac{d}{dT} E(x(T), y(T)) = \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dT} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{dy}{dT} = \text{sen}(x)y + y(-\text{sen}(x)) = 0.$$

Por tanto las órbitas se encuentran a lo largo de las curvas de nivel de E , es decir dibujar el plano de fases para un sistema hamiltoniano como (12) es lo mismo que dibujar los conjuntos de nivel de la función hamiltoniana E . La matriz jacobiana del sistema (12) en el punto (x, y) viene dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 E}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x) & 0 \end{pmatrix},$$

con autovalores $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma} = \pm\sqrt{-\cos(x)}$. Por tanto si $\cos(x) < 0$ hay dos autovalores reales de signo contrario y el equilibrio es inestable de tipo silla. Esto ocurre en los múltiplos impares de π , es decir cuando $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$, etc. Si $\cos(x) > 0$ hay dos autovalores imaginarios puros $\lambda_1 =$

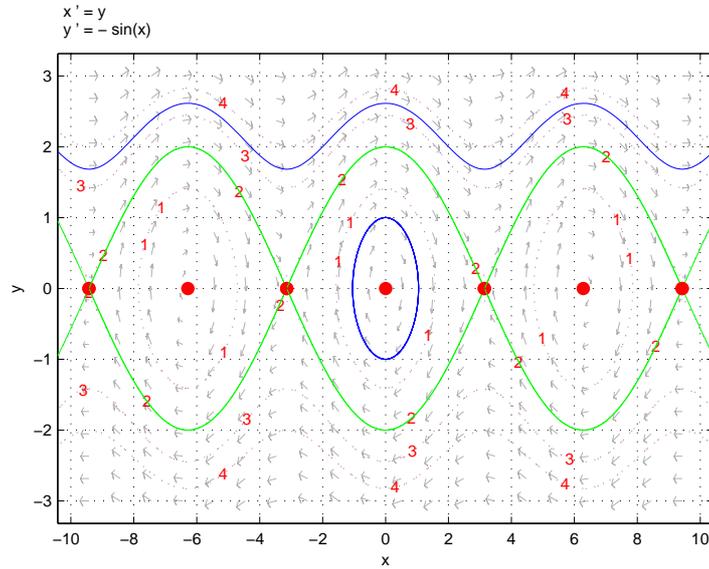


Figura 17: Retrato de fases del sistema (12).

$\sqrt{\cos(x)}i$, $\lambda_2 = -\sqrt{\cos(x)}i$, por lo que el equilibrio es estable de tipo centro. Esto sucede en los múltiplos pares de π cuando $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$, etc.

El retrato de fases nos indica que hay tres tipos diferentes de curvas solución y por tanto de movimientos: libración, rotación y el comportamiento límite entre ambos. El primer caso corresponde a soluciones periódicas ya que el péndulo oscila entre dos valores simétricos del intervalo $(-\pi, \pi)$ (en la figura 1 corresponde a la órbita cerrada de color azul que pasa por $(x, y) = (0, 1)$, siendo interior a la curva de nivel $E(x, y) = 1$). En el segundo caso las soluciones no son periódicas y el péndulo va girando, dando vueltas completas en sentido contrario a las agujas del reloj, recorriendo todos los ángulos posibles (en la figura 1 corresponde a la órbita de color azul que pasa por $(x, y) = (2, 2)$ y está situada entre las curvas de nivel 3 y 4 de la función $E(x, y)$). Por último el caso límite corresponde en el plano de fases a órbitas, llamadas heteroclinas, que unen dos puntos de equilibrio distintos de tipo silla y separa las soluciones oscilantes, de ida y vuelta, de las soluciones rotatorias, que giran continuamente (en la figura 1 corresponde a las órbitas de color verde, una de ellas pasa por $(x, y) = (0, 2)$, y está contenida en la curva de nivel $E(x, y) = 2$). Notar que una órbita heteroclina corresponde a la intersección de una de las ramas de la variedad estable de uno de los equilibrios silla con la inestable del otro.

- c) Suponemos ahora que $\mu > 0$, es decir hay una amortiguación lineal debido a la fricción en el pivote del brazo del péndulo y por tanto el sistema dinámico es ahora disipativo ya que hay una pérdida de energía. En este caso el sistema (11) ya no es hamiltoniano, pues si existe una función hamiltoniana $H(x, y)$ con derivadas parciales segundas continuas sería $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}$ y como consecuencia de ello

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Pero esto no ocurre en nuestro caso pues

$$\frac{\partial}{\partial x}(y) = 0 \neq \mu = -\frac{\partial}{\partial y}(-\mu y - \text{sen}(x)),$$

si bien los puntos de equilibrio son los mismos que en el caso anterior $(0, 0), (\pm\pi, 0), (\pm 2\pi, 0), \dots$ etc.

Ahora la energía total E no es constante a lo largo de las curvas solución del sistema (11), sino una función decreciente. En efecto, si $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema (11) se cumple que

$$\frac{d}{dT}E(x(t), y(t)) = \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dT} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{dy}{dT} = \text{sen}(x)y + y(-\mu y - \text{sen}(x)) = -\mu y^2 \leq 0.$$

Es decir $E(x, y)$ es una función de Lyapunov para el sistema (11). En consecuencia las curvas solución cruzan los conjuntos de nivel de la función de Lyapunov $E(x, y)$ desde valores mayores a menores de la misma (ver figura 2), y dado que E tiene un mínimo global en el origen, todas las soluciones en un entorno del origen se aproximan al mismo conforme pasa el tiempo. En la figura 2 hemos dibujado en color azul las órbitas correspondientes a las condiciones iniciales $(x, y) = (0, 1)$ y $(x, y) = (2, 2)$. En color verde aparecen las variedades estables e inestables de los equilibrios de tipo silla. Se puede observar como un equilibrio de tipo foco está conectado con los dos equilibrios silla adyacentes a través de una de las ramas de la variedad inestable de los equilibrio silla. La variedad estable viene del infinito.

Para verificarlo hallamos la matriz jacobiana del sistema (11) en un punto (x, y)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x) & -\mu \end{pmatrix},$$

cuyos autovalores son $\lambda_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\cos(x)}}{2}$. Por tanto en los puntos de equilibrio correspondientes a múltiplos impares de π , al ser $\cos(x) = -1$, hay dos autovalores reales de signo contrario y el equilibrio es inestable de tipo silla. Si $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \dots$ etc, entonces $\cos(x) = 1$ y hay tres casos diferentes. En efecto, si $0 < \mu < 2$ (hay menos fricción) el radicando es negativo y los autovalores son complejos con parte real negativa por lo tanto los equilibrios serían focos estables. Si $\mu = 2$ hay un único autovalor real doble $\lambda = -1 < 0$, por lo tanto los equilibrios son nodos degenerados estables y finalmente si $\mu > 2$ (hay mayor fricción) tenemos dos autovalores reales negativos, ya que $\sqrt{\mu^2 - 4} < \mu$, y los puntos de equilibrio son nodos estables.

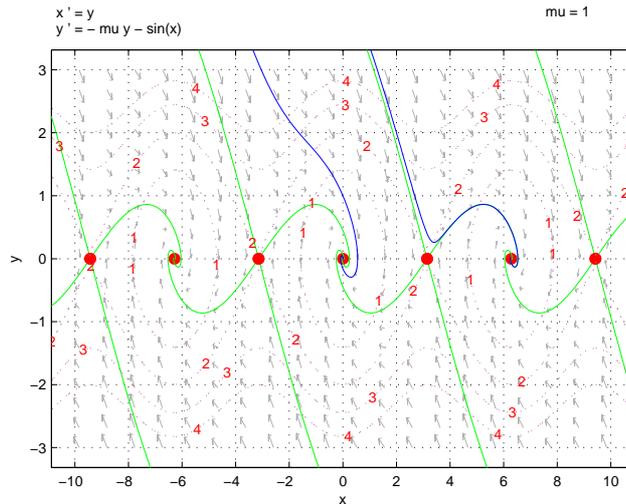


Figura 18: Retrato de fases del sistema (11) para $\mu = 1$.

Por último para integrar numéricamente la solución del sistema (11), correspondiente a las condiciones iniciales $(x(0), y(0)) = (0, 10)$, y representar graficamente la pérdida de energía con el tiempo generamos el archivo ftysis.m con las ecuaciones del sistema

```
function Z=ftysis(t,E)
x=E(1); y=E(2);
Z=[y, -y-sin(x)]';
```

que será llamado al correr el programa energia.m

```
function S=energia(ftysis,a,b,Za,M)
%
% Datos de entrada
% ftysis es el sistema, almacenado como una cadena de caracteres
% a y b son los extremos del intervalo
% Za=[x1(a),...,xn(a)] es la condición inicial
% M es el número de pasos
%
% Datos de salida
% Calcula S=[Tiempo,Energia total del sistema en el instante T] y
% dibuja la gráfica de la energía frente al tiempo
%
h=(b-a)/M;
T=a:h:b;
[T X]=ode45(ftysis,T,Za);
for k=1:length(T)
E(k)=(X(k,2).^2)/2+1-cos(X(k,1));
end
format long
S=[T,E'];
plot(T,E)
grid
```

La gráfica pedida se obtiene ejecutando, en la ventana de comandos, la instrucción

```
>> energia('ftysis',0,3*pi,[0 10],30)
```

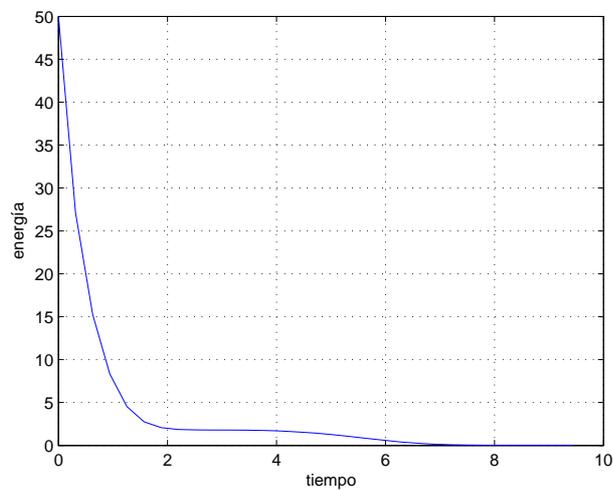


Figura 19: Gráfica de la energía frente al tiempo correspondiente a la solución $(x(0), y(0)) = (0, 10)$ del sistema (11) con $\mu = 1$.