Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales con Matlab: Problemas de contorno

25 de mayo de 2009

1. Sea el problema de contorno:

$$y'' = y' + 2y + cos(t), \quad y(0) = -0{,}3, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0{,}1, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

   cuya solución es $y(t) = \frac{-1}{10}(sen(t) + 3\ cos(t))$.

   Hallar la solución y su derivada, así como el error cometido para cada una de ellas, cuando el tamaño de paso $h = \frac{\pi}{4}$ y cuando $h = \frac{\pi}{8}$.

2. Representemos por u el potencial electrostático entre dos esferas metálicas concéntricas de radios R_1 y R_2 con $R_1 < R_2$, tales que el potencial de la esfera interior se mantenga constante en V_1 voltios y el potencial de la esfera exterior en 0 voltios. El potencial en la región situada entre ambas esferas está regido por la ecuación de Laplace, que en esta aplicación particular se reduce a

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0, \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad u(R_1) = V_1, \quad u(R_2) = 0.$$

   Suponga que $R_1 = 2$ mm, $R_2 = 4$ mm y $V_1 = 110$ voltios.

   a) Aproxime $u(3)$ por medio del algoritmo del disparo lineal con 40 subintervalos.
   b) Compare los resultados obtenidos en el apartado (a) con el potencial real $u(3)$, donde

$$u(r) = \frac{V_1 R_1}{r}\left(\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}\right).$$

3. Consideremos la deflexión de una viga con los extremos soportados sujetos a una carga uniforme. El problema con valor de frontera que rige esta situación física es

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = \frac{S}{EI}\omega + \frac{qx}{2EI}(x - l), \quad 0 < x < l,$$

   con las condiciones de frontera $\omega(0) = 0$ y $\omega(l) = 0$.

   Suponga que la viga es de acero y del tipo $W10$, con las siguientes características: longitud $l = 120\ plg$, intensidad de la carga uniforme $q = 100\ lb/pie$, módulo de elasticidad $E = 3{,}0$ x $10^7\ lb/plg^2$, esfuerzo en los extremos $S = 1000\ lb$ y momento central de inercia $I = 625\ plg^4$.

a) Aproxime la deflexión de la viga $\omega(x)$ cada 6 plg mediante el método de las diferencias finitas.

b) La relación real está dada por $\omega(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} + b(x-l)x + c$, donde $c_1 = 7{,}7042537 \text{ x } 10^4$, $c_2 = 7{,}9207462 \text{ x } 10^4$, $a = 2{,}3094010 \text{ x } 10^{-4}$, $b = -4{,}1666666 \text{ x } 10^{-3}$ y $c = -1{,}56249999 \text{ x } 10^5$. ¿Es el error máximo en el intervalo menor que 0,02 pulgadas?.

c) La ley estatal de la construcción estipula que $max_{0<x<l}\omega(x) < \dfrac{1}{300}$. ¿Cumple esta viga con el código estatal?.

4. La deflexión de una placa rectangular larga y uniformemente cargada, y que se encuentra bajo una fuerza de tensión axial, se rige por una ecuación diferencial de segundo orden. Sea S la fuerza axial y q la intensidad de la carga uniforme. La deflexión W a lo largo de la longitud elemental está dada por

$$W''(x) - \frac{S}{D}W(x) = \frac{-ql}{2D}x + \frac{q}{2D}x^2, \quad 0 \leq x \leq l, \quad W(0) = W(l) = 0,$$

donde l es la longitud de la placa y D es la rigidez de deflexión de la placa. Sean $q = 200\ lb/plg^2$, $S = 100\ lb/plg$, $D = 8{,}8 \text{ x } 10^7\ lb/plg$, y $l = 50\ plg$. Aproxime la deflexión en intervalos de 1 plg.

Soluciones

SOLUCIÓN PROBLEMA 1

Utilizando el método del disparo lineal resolvemos los dos problemas de valor inicial

$$u'' = u' + 2u + cos(t), \quad u(0) = -0{,}3, \quad u'(0) = 0$$

y

$$v'' = v' + 2v, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1,$$

ya que al ser $p(t) = 1, \ \ q(t) = 2, \ \ r(t) = cos(t)$ funciones continuas y $q(t) > 0$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tenemos asegurada la existencia de una única solución en dicho intervalo.

Para resolver la primera ecuación realizamos el cambio de variable $u_1 = u, \ \ u_2 = u'$, obteniéndose el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = u_2 + 2u_1 + cos(t), \end{cases}$$

con las condiciones iniciales $(u_1(0), u_2(0)) = (-0{,}3, 0)$.

Análogamente para la segunda ecuación obtendríamos el sistema

$$\begin{cases} v_1' = v_2, \\ v_2' = v_2 + 2v_1, \end{cases}$$

con las condiciones iniciales $(v_1(0), v_2(0)) = (0, 1)$.

La función que aparece en el primer sistema está definida en el fichero ftysis1.m, que listamos a continuación:

```
function Z=ftysis1(t,Z)
u1=Z(1); u2=Z(2);
Z=[u2, u2+2*u1+cos(t)]';
```

Análogamente para el otro sistema creamos el fichero ftysis2.m

```
function Z=ftysis2(t,Z)
v1=Z(1); v2=Z(2);
Z=[v2, v2+2*v1]';
```

Por último construimos el programa disparo.m que llama a los anteriores y nos da la solución del problema de contorno, así como su derivada y los errores cometidos, en cada caso, para $h = \frac{\pi}{4}$ y $h = \frac{\pi}{8}$.

```
function D=disparo(F1,F2,a,b,alfa,beta,h)
%
%        Datos de entrada
% F1 y F2 son los dos sistemas de ecuaciones de primer orden almacenados
% como cadenas de caracteres
% a y b son los extremos del intervalo
% alfa y beta son los valores de la solución en los extremos a y b
% h es el tamaño de paso
%
%        Datos de salida
% D=[T,Y,errorY,Yprima,errorYprima], donde T es el vector con las abscisas,
```

```
% Y es el vector solución, Yprima el vector con la derivada de la solución
% y los vectores con el error cometido al calcular Y e Yprima
%
% solución del sistema F1
T=a:h:b;
Za=[alfa, 0];
[T,Z]=ode45(F1,T,Za);
U=Z(:,1);
Uprima=Z(:,2);
% solución del sistema F2
Za=[0, 1];
[T,Z]=ode45(F2,T,Za);
V=Z(:,1);
Vprima=Z(:,2);
% solución del problema de contorno y error cometido
M=(b-a)/h;
Y=U+(beta-U(M+1))*V/V(M+1);
errorY=abs((-1/10)*(sin(T) + 3*cos(T))-Y);
% derivada de la solución del problema de contorno y error cometido
Yprima=Uprima+(beta-U(M+1))*Vprima/V(M+1);
errorYprima=abs((-1/10)*(cos(T) - 3*sin(T))-Yprima);
% datos de salida
format long
D=[T,Y,errorY,Yprima,errorYprima];
```

La solución se obtiene escribiendo en la ventana de comandos

```
>>disparo('ftysis1','ftysis2',0,pi/2,-0.3,-0.1,pi/4)
```

t	$y(t)$	*Error en* $y(t)$	$y'(t)$	*Error en* $y'(t)$
0	-0.30000000000000	0.00000000000000	-0.10000002983912	0.00000002983912
$\frac{\pi}{4}$	-0.28284254932248	0.00000016315214	0.14142169707922	0.00000034084191
$\frac{\pi}{2}$	-0.10000000000000	0.00000000000000	0.29999997959385	0.00000002040615

Cuadro 1: Resultado problema 1 mediante disparo con $h = \dfrac{\pi}{4}$

Analogamente se obtiene la solución para $h = \dfrac{\pi}{8}$

```
>>disparo('ftysis1','ftysis2',0,pi/2,-0.3,-0.1,pi/8)
```

t	$y(t)$	*Error en* $y(t)$	$y'(t)$	*Error en* $y'(t)$
0	-0.30000000000000	0.00000000000000	-0.10000002983912	0.00000002983912
$\frac{\pi}{8}$	-0.31543226496712	0.00000006197722	0.02241693191560	0.00000014454280
$\frac{\pi}{4}$	-0.28284254932248	0.00000016315214	0.14142169707922	0.00000034084191
$\frac{3\pi}{8}$	-0.20719326725867	0.00000028429802	0.23889492688184	0.00000058963503
$\frac{\pi}{2}$	-0.10000000000000	0.00000000000000	0.29999997959385	0.00000002040615

Cuadro 2: Resultado problema 1 mediante disparo con $h = \dfrac{\pi}{8}$

Si utilizamos el método de las diferencias finitas, necesitamos generar los ficheros donde figuren las funciones $p(t)$, $q(t)$ y $r(t)$, a saber:

```
function y=p(t)
y=1;
```

```
function y=q(t)
y=2;
```

```
function y=r(t)
y=cos(t);
```

A continuación construimos el programa diferenciasfinitas.m que llama a los anteriores y nos da la solución del problema de contorno, así como su derivada y los errores cometidos, en cada caso, para $h = \dfrac{\pi}{4}$ y $h = \dfrac{\pi}{8}$.

```
function D=diferenciasfinitas(p,q,r,a,b,alfa,beta,h)
%
%        Datos de entrada
% p, q y r son los coeficientes de la ecuación de segundo orden
% introducidos como cadenas de caracteres
% a y b son los extremos del intervalo
% alfa y beta son los valores de la solución en los extremos a y b
% h es el tamaño de paso
%
%        Datos de salida
% D=[T',Y,errorY,Yprima, errorYprima] donde T' es el vector de las abscisas
% de orden (M+2)x1, Y el vector solución, errorY el error cometido, Yprima
% la derivada de la solución y errorYprima el error cometido en la derivada
%
 M=((b-a)/h)-1;
 T=a+h:h:a+h*M;
% construcción de la matriz tridiagonal de orden MxM
 for i=1:M
     A(i,i)=2+h.^2.*feval(q,T(i));
 end
 for i=1:M-1
     A(i,i+1)=-1+(h/2).*feval(p,T(i));
     A(i+1,i)=-1-(h/2).*feval(p,T(i+1));
 end
% construcción del vector de los términos independientes de orden 1xM
 B(1)=-(h.^2).*feval(r,T(1))+(1+(h/2).*feval(p,T(1))).*alfa;
 B(M)=-(h.^2).*feval(r,T(M))+(1-(h/2).*feval(p,T(M))).*beta;
 for i=2:M-1
     B(i)=-(h.^2).*feval(r,T(i));
 end
% resolución del sistema tridiagonal para hallar la solución Y
 Y=A\B';
 Y=[alfa; Y; beta];
% vector con las abscisas
 T=[a T b];
% solución exacta del problema y error cometido
 YE=(-1/10)*(sin(T) + 3*cos(T));
 errorY=abs(Y-YE');
```

```
% construcción del vector con la derivada de la solución Yprima y error
 Yprima(1)=(Y(2)-Y(1))/h;
 Yprima(M+2)=(Y(M+2)-Y(M+1))/h;
 for i=2:M+1
     Yprima(i)=(Y(i+1)-Y(i-1))/(2.*h);
 end
 errorYprima=abs((-1/10)*(cos(T) - 3*sin(T))-Yprima);
% matriz con los datos de salida
 format long
 D=[T' Y errorY Yprima' errorYprima'];
```

La solución se obtiene escribiendo en la ventana de comandos

```
>>diferenciasfinitas('p','q','r',0,pi/2,-0.3,-0.1,pi/4)
```

t	$y(t)$	$Error\ en\ y(t)$	$y'(t)$	$Error\ en\ y'(t)$
0	-0.30000000000000	0.00000000000000	0.18631852077673	0.28631852077673
$\frac{\pi}{4}$	-0.15366577597503	0.12917693649959	0.12732395447352	0.01409740176379
$\frac{\pi}{2}$	-0.10000000000000	0.00000000000000	0.06832938817031	0.23167061182969

Cuadro 3: Resultado problema 1 mediante diferencias finitas con $h = \dfrac{\pi}{4}$

Analogamente se obtiene la solución para $h = \dfrac{\pi}{8}$

```
>>diferenciasfinitas('p','q','r',0,pi/2,-0.3,-0.1,pi/8)
```

t	$y(t)$	$Error\ en\ y(t)$	$y'(t)$	$Error\ en\ y'(t)$
0	-0.30000000000000	0.00000000000000	-0.03994254349826	0.06005745650174
$\frac{\pi}{8}$	-0.31568540015248	0.00025319716258	0.02176494963166	0.00065212682674
$\frac{\pi}{4}$	-0.28290584853285	0.00006313605823	0.13838810939091	0.00303324684640
$\frac{3\pi}{8}$	-0.20699563320082	0.00019734975984	0.23288295931537	0.00601255720151
$\frac{\pi}{2}$	-0.10000000000000	0.00000000000000	0.27246214261052	0.02753785738948

Cuadro 4: Resultado problema 1 mediante diferencias finitas con $h = \dfrac{\pi}{8}$

SOLUCIÓN PROBLEMA 2

En este caso al ser $p(t) = \dfrac{-2}{t}$, $q(t) = 0$, $r(t) = 0$ no se cumplen las condiciones del teorema de existencia y uncidad, pero sin embargo veremos que el problema planteado tiene solución única.

a)
$$u(3) \approx 0{,}36666665363108 \times 10^2.$$

b) La solución exacta y el error cometido en el apartado anterior vienen dados por

$$u(3) = \frac{110}{3}, \qquad error = 1{,}303559 \times 10^{-8}.$$

SOLUCIÓN PROBLEMA 3

a) La tabla que se muestra a continuación aproxima la deflexión de la viga cada $x = 6$ plg.

x	$\omega(x)$
0	0
6	0.00002298063068
12	0.00004530466548
18	0.00006638462726
24	0.00008570215650
30	0.00010280801030
36	0.00011732206148
42	0.00012893329792
48	0.00013739982191
54	0.00014254884971
60	0.00014427671121
66	0.00014254884971
72	0.00013739982191
78	0.00012893329792
84	0.00011732206148
90	0.00010280801030
96	0.00008570215650
102	0.00006638462726
108	0.00004530466548
114	0.00002298063068
120	0

Cuadro 5: Resultado problema 3 mediante el método de diferencias finitas con $h = 6$

b) En la figura siguiente hemos representado el error cometido en los valores $x \in [0, 120]$ calculados en el apartado anterior. Como se observa el error máximo es menor de 0.02 pulgadas en el intervalo considerado.

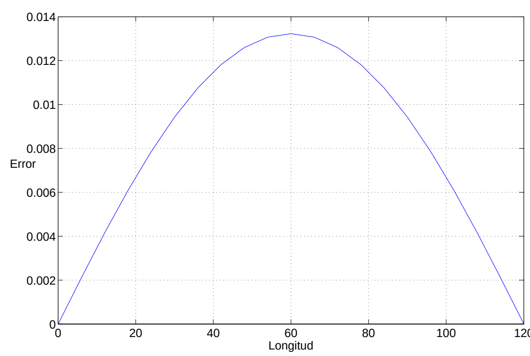

Figura 1: Gráfica de la función error.

c) En la figura siguiente hemos representado, en color azul, los valores aproximados de $\omega(x)$ que figuran en la tabla 5, en color negro los valores exactos de $\omega(x)$ y en color rojo la máxima deflexión que estipula la ley. La máxima deflexión ocurre en $x = 60$ pulgadas. La solución exacta está dentro de la tolerancia permitida, y por tanto la viga cumple con el código estatal, pero no podriamos afirmar lo mismo si consideramos la solución aproximada.

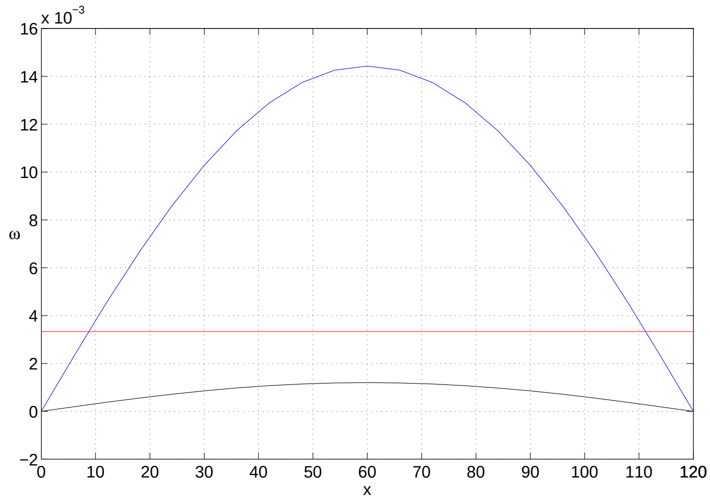

Figura 2: Gráfica de $\omega(x)$.