Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos

Exámenes de Prácticas Resueltos

Ingeniería Industrial
José Ignacio Márquez Camacho

Problema 1:

Supongamos que originalmente hay P toneladas de peces en un lago y que su evolución viene dada por la ecuación logística con razón de reproducción r =1 y capacidad de soporte del medio k =10. Es decir:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{k}\right)$$

a) Si en el instante t =0 hay diez toneladas de peces y se comienza a pescar en dicho lago, a razón de 5 toneladas al mes los tres primeros meses y 1 tonelada los restantes meses de la temporada de pesca, ¿cuál es la población al cabo de 15 meses? ¿Cuál es el valor mínimo de la población? A partir del tercer mes, ¿tiende la población a estacionarse? Hallar dicho valor de equilibrio.

A la ecuación que tenemos, le restamos las 5 toneladas/mes durante los tres primeros meses y 1 tonelada los restantes meses de la temporada de pesca, por lo que la ecuación a resolver es la siguiente:

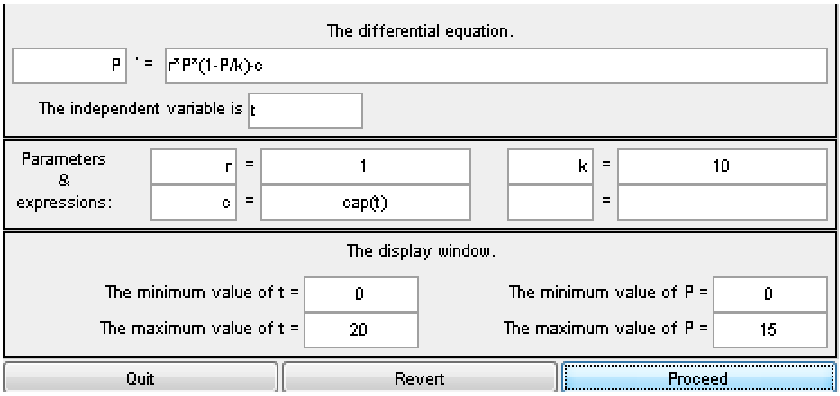
$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{k}\right) - cap$$

Creamos la función cap (captura):

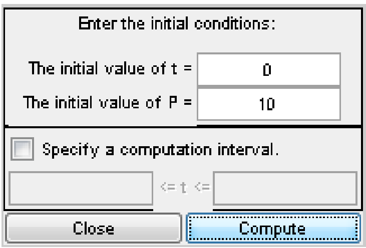
>> edit cap.m

```
function v=cap(t)
v=5*(t<=3)+1*(t>3);
```

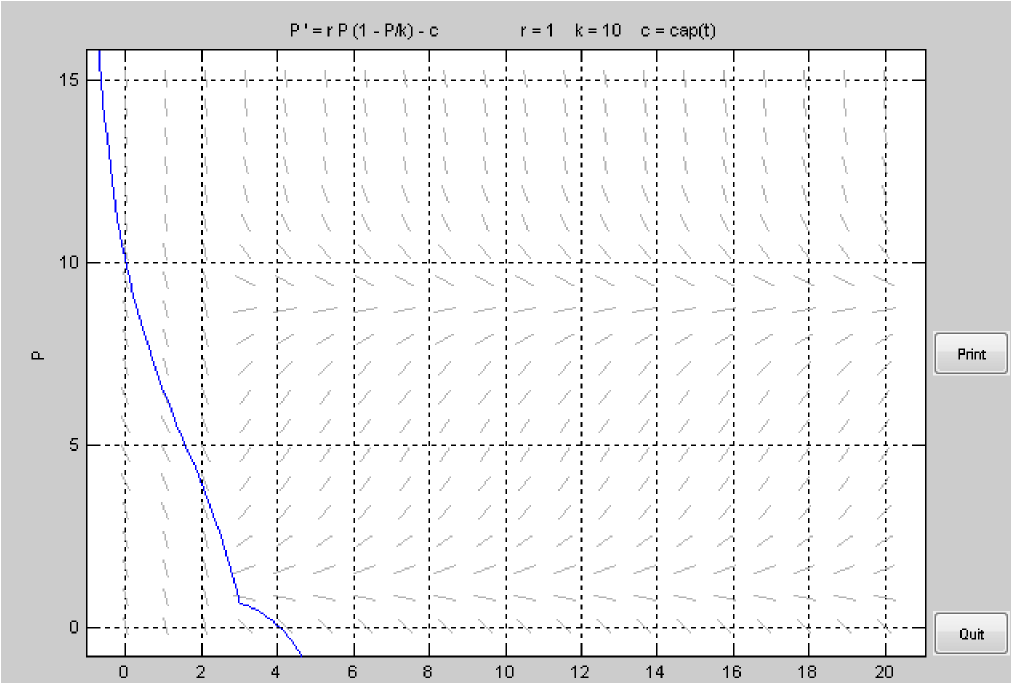
Para resolver este problema se utiliza el dfield7, y fijamos los datos:



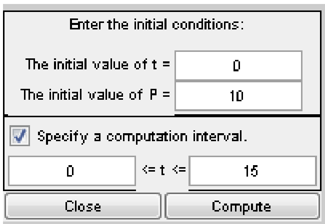
A continuación introducimos por teclado las condiciones iniciales:

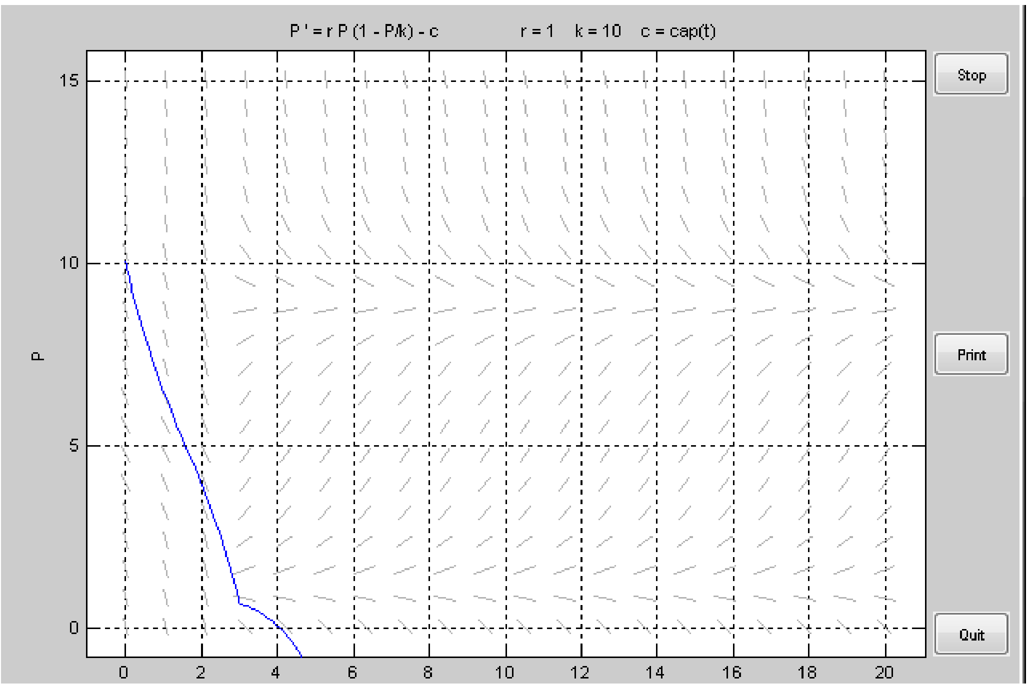


Y obtenemos:



Para saber que pasa en t=15 meses especificamos un intervalo de computación de 0 a 15 y exportamos los datos:





```
>> A=[dfdata1.t;dfdata1.P]'
```

A =

0	10.0000
0.0075	9.9626
0.0150	9.9256
0.0225	9.8887
0.0300	9.8522
0.0900	9.5691
0.1500	9.3011
0.2100	9.0466
0.2700	8.8042
0.3529	8.4867
0.4358	8.1871
0.5188	7.9029
0.6017	7.6321
0.6920	7.3501
0.7824	7.0798
0.8728	6.8195
0.9632	6.5676
1.0585	6.3096
1.1538	6.0580
1.2491	5.8114
1.3444	5.5685
1.4532	5.2944
1.5620	5.0220
1.6708	4.7498
1.7796	4.4761
1.9134	4.1351
2.0471	3.7861
2.1809	3.4256
2.3147	3.0495
2.3903	2.8282
2.4660	2.5995
2.5416	2.3624
2.6173	2.1156
2.6270	2.0833
2.6366	2.0508
2.6463	2.0182
2.6559	1.9854
2.7332	1.7154
2.8105	1.4315
2.8878	1.1314
2.9651	0.8127
2.9681	0.8003
2.9710	0.7877
2.9739	0.7752
2.9768	0.7626
2.9818	0.7415
2.9867	0.7202
2.9916	0.6989
2.9965	0.6774
2.9972	0.6746
2.9978	0.6718
2.9984	0.6690
2.9991	0.6662
2.9993	0.6653
2.9995	0.6643
2.9997	0.6634
2.9999	0.6625
2.9999	0.6624
3.0000	0.6624
3.0000	0.6624
3.0000	0.6623
3.0000	0.6623
3.0000	0.6623
3.0001	0.6623
3.0001	0.6622
3.0001	0.6622
3.0001	0.6622
3.0002	0.6622
3.0002	0.6622
3.0004	0.6621
3.0006	0.6621
3.0007	0.6620
3.0009	0.6619
3.0024	0.6613
3.0039	0.6608
3.0055	0.6602
3.0070	0.6596
3.0190	0.6549
3.0311	0.6502
3.0432	0.6455
3.0552	0.6407
3.1214	0.6134
3.1876	0.5845
3.2539	0.5538
3.3201	0.5213
3.3845	0.4877
3.4490	0.4521
3.5135	0.4144
3.5779	0.3743
3.6351	0.3368
3.6924	0.2971
3.7496	0.2553
3.8068	0.2111
3.8455	0.1798
3.8843	0.1473
3.9230	0.1135
3.9618	0.0785
4.0016	0.0410
4.0414	0.0021
4.0812	-0.0384
4.1210	-0.0806
4.1548	-0.1178
4.1886	-0.1563
4.2224	-0.1962
4.2563	-0.2375
4.2927	-0.2836
4.3290	-0.3316
4.3654	-0.3814
4.4018	-0.4332
4.4418	-0.4925
4.4817	-0.5544
4.5216	-0.6191
4.5615	-0.6868
4.6031	-0.7606
4.6447	-0.8380
4.6863	-0.9193
4.7278	-1.0047
4.7698	-1.0954
4.8117	-1.1907
4.8537	-1.2912
4.8957	-1.3971
4.9371	-1.5074
4.9785	-1.6238
5.0199	-1.7467
5.0613	-1.8767
5.1014	-2.0099
5.1415	-2.1508
5.1817	-2.3001
5.2218	-2.4584
5.2601	-2.6185
5.2984	-2.7882
5.3367	-2.9684
5.3750	-3.1599
5.4110	-3.3515
5.4470	-3.5549
5.4831	-3.7713
5.5191	-4.0018
5.5526	-4.2300
5.5862	-4.4727
5.6197	-4.7314
5.6532	-5.0075
5.6840	-5.2784
5.7148	-5.5669
5.7457	-5.8749
5.7765	-6.2043
5.8046	-6.5247
5.8327	-6.8665
5.8607	-7.2319
5.8888	-7.6233
5.9142	-8.0013
5.9395	-8.4050
5.9649	-8.8372
5.9902	-9.3007
6.0129	-9.7456
6.0356	-10.2213
6.0583	-10.7310
6.0810	-11.2785
6.1013	-11.8011
6.1215	-12.3604
6.1417	-12.9603
6.1619	-13.6054
6.1798	-14.2182
6.1977	-14.8747
6.2156	-15.5795
6.2335	-16.3381
6.2492	-17.0559
6.2650	-17.8253
6.2807	-18.6520
6.2965	-19.5428

Al cabo de 15 meses, la población de peces en el río es de 0 toneladas.

Para calcular el valor mínimo de la población hacemos:

>> [A,B]=min(dfdata1.P)

A = -19.5428

B = 169

Y para encontrar el mes en el que se produce:

>> dfdata1.t(B)

ans = 6.2965

A partir de la gráfica y de los datos extrapolados, la población tiende a perderse, es decir, se hace cero, aproximadamente a los 4 meses. Por lo que como he dicho, la población de peces no tiende a estabilizarse, sino a perderse.

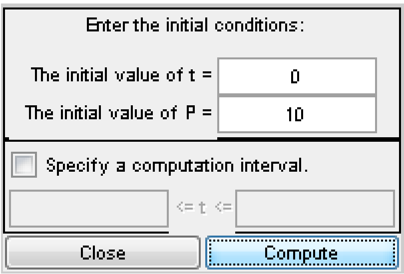
b) Si en el instante t =0 (Enero) hay diez toneladas de peces, y se pesca en dicho lago 3 toneladas al mes, durante los meses de Marzo, Abril y Mayo, repitiéndose este tipo de captura cada año ¿cuál es la población al cabo de 18 meses?

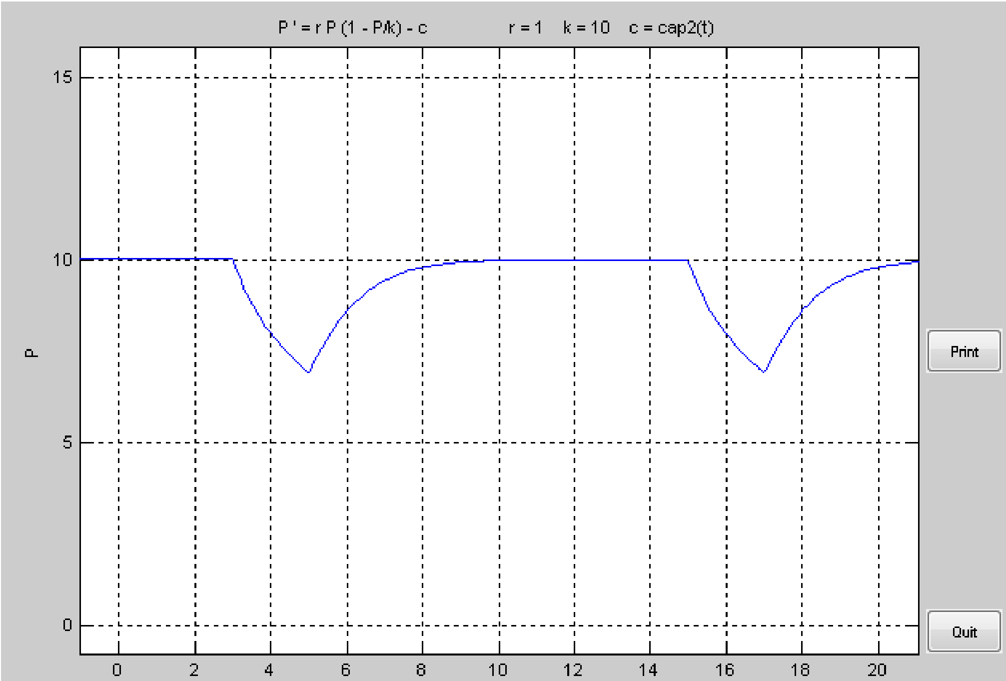
Se resolvería con la misma ecuación, pero con diferente cap:

>> edit cap2.m

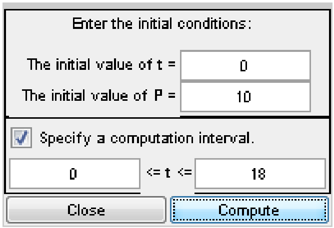
```
function v=cap2(t)
tt= mod(t,12);
if tt>=3 && tt<=5
   v=3;
else
   v=0;
end
```

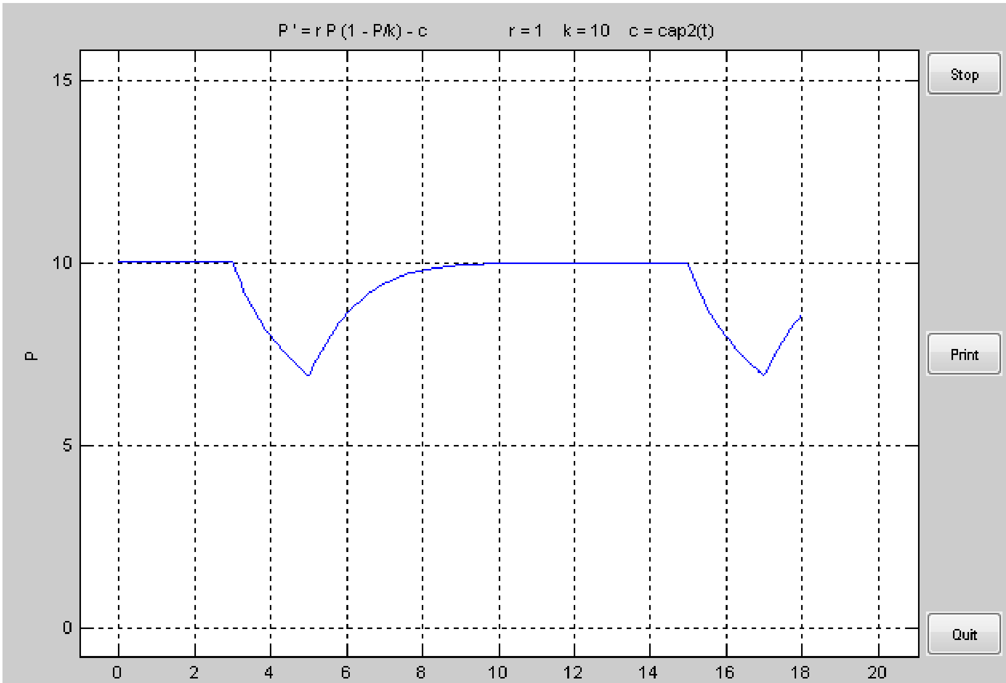
Para la condición inicial de 10 toneladas en el instante cero se obtiene la siguiente gráfica:





Para saber que pasa en t=18 meses especificamos un intervalo de computación de 0 a 18 y exportamos los datos:



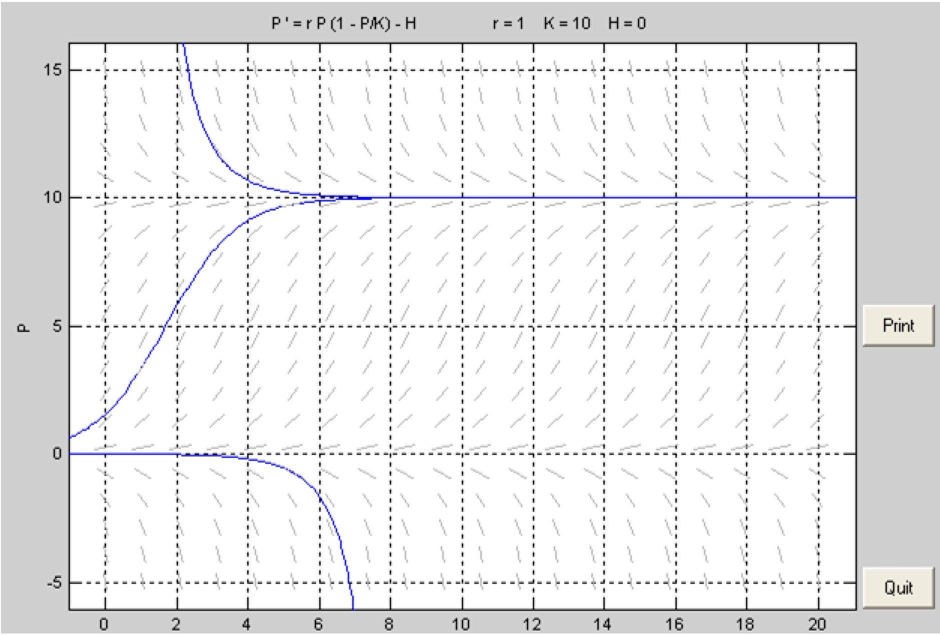


La población al cabo de 18 meses es 8.579 toneladas.

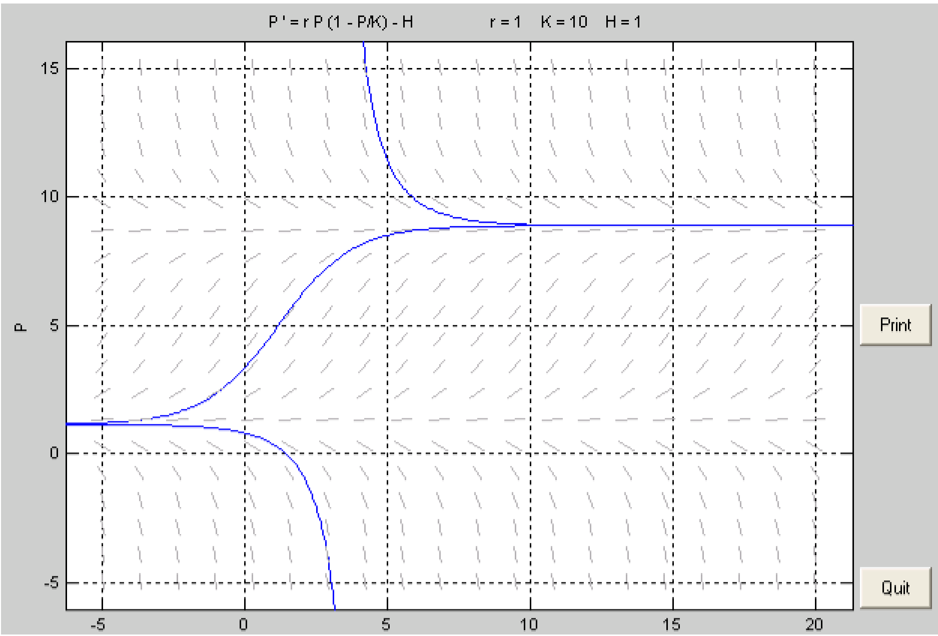
c) Supongamos que la captura se mantiene constante en todo instante, es decir H(t) = k. Hallar los equilibrios. Al variar esta constante k en el intervalo [0,5], ¿cambia el número de equilibrios? En caso afirmativo, ¿para qué valores de la constante k se produce un cambio en el número de puntos de equilibrio? ¿Qué tipo de bifurcación de equilibrio tiene lugar? Realizar el retrato fase de cada uno de los casos presentes.

Para los diferentes valores de k en la función H(t), sí varía el nº de equilibrios. Pasando de tener dos puntos de equilibrio para k = 2 a no tener ninguno a partir de k = 3. Es bifurcación silla-nodo y se da para k =2.5.

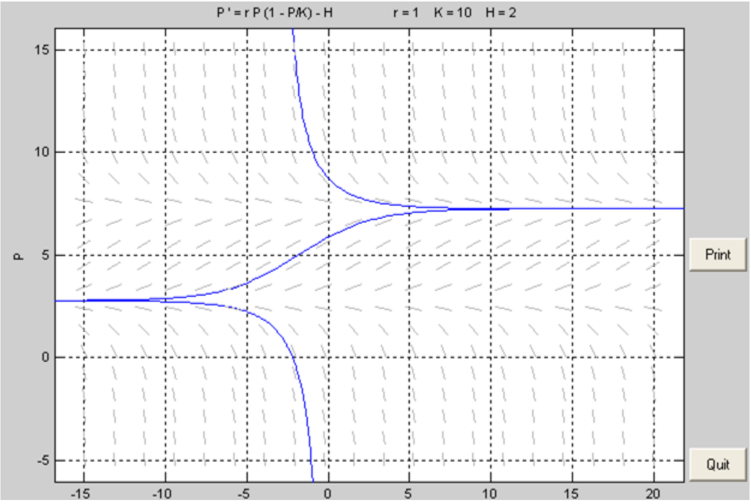
>>H (t)=0; dos puntos de equilibrio: P = 0 y P = 10 toneladas.



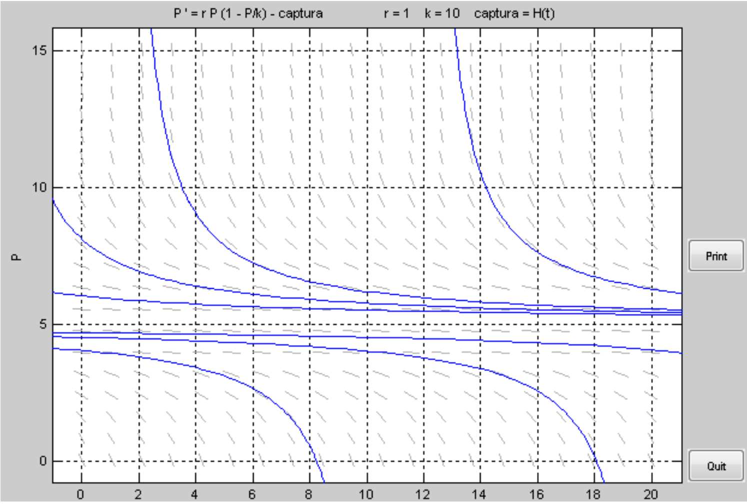
>>H (t)=1; dos puntos de equilibrio: P = 1.17 y P = 8.83 toneladas.



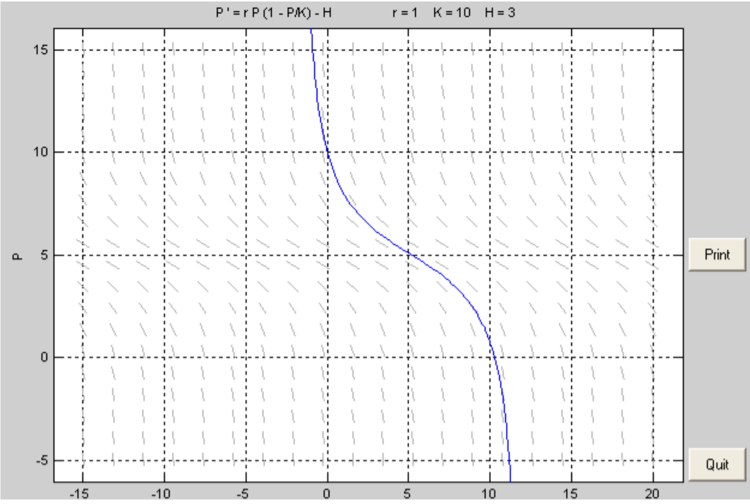
>>H (t)=2; dos puntos de equilibrio: P =2.7 y P =7.25 toneladas



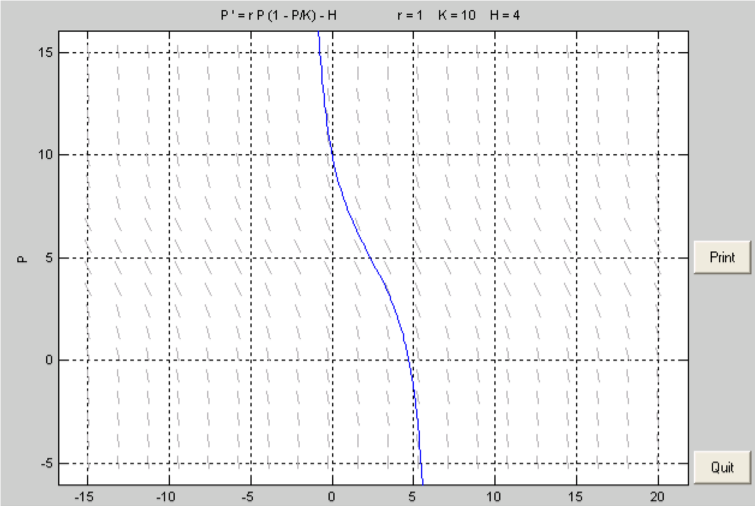
>>H (t)=2.5; Silla-nodo P = 5 toneladas



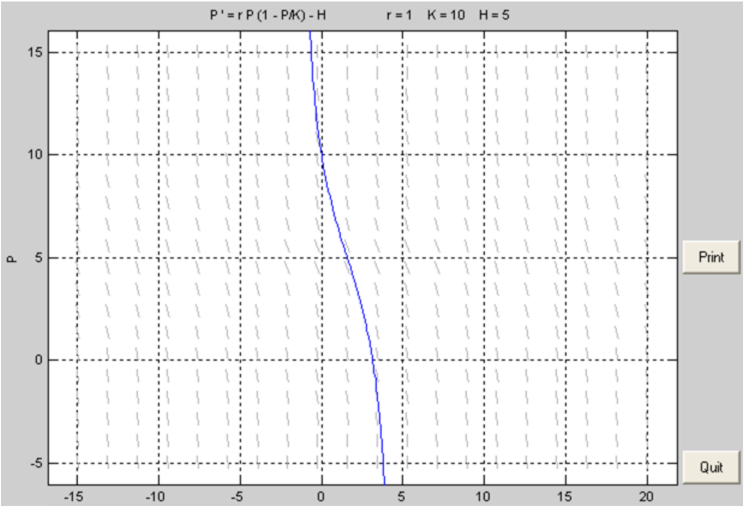
>>H (t)=3; No tiene puntos de equilibrio.



>>H (t)=4; No tiene puntos de equilibrio.



>>H (t)=5; No tiene puntos de equilibrio.



Problema 2:

Consideremos la ecuación diferencial:

$$\ddot{y} - \alpha \cdot \dot{y} + y + \dot{y}^3 = 0$$

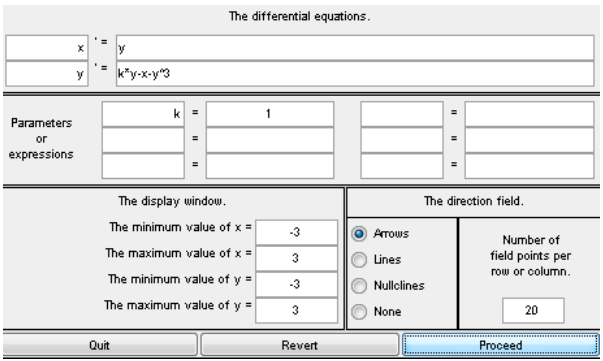
a) Variando el parámetro α, en el intervalo [-1,1], encuentra y clasifica los distintos tipos de equilibrio que existen.

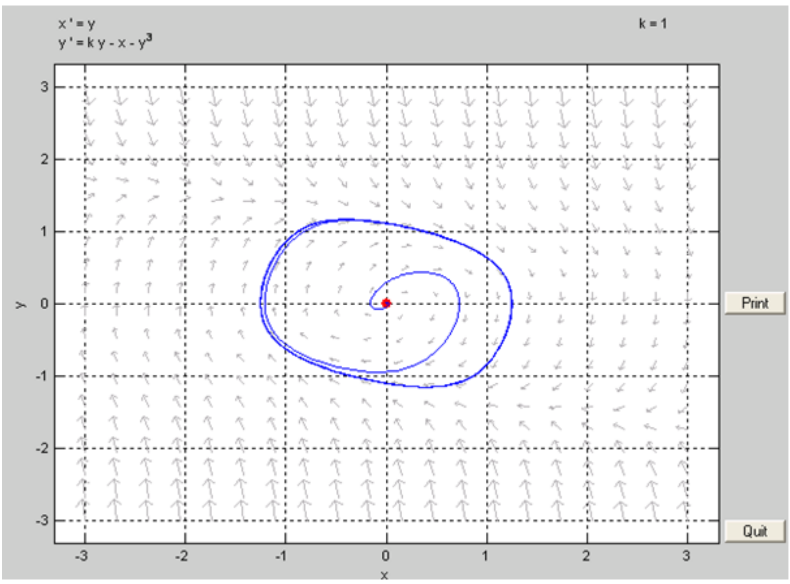
$$\dot{y} = x$$
$$\dot{x} = \alpha \cdot x - y - x^3$$

α = -1: Puntos de equilibrio → (0,0) Foco estable. No se producen órbitas periódicas.
α = 0: Puntos de equilibrio → (0,0) Centro. No se producen órbitas periódicas.
α = 1: Puntos de equilibrio → (0,0) Foco inestable. Sí tiene una órbita periódica.

b) ¿Cuántas órbitas periódicas tiene este sistema para cada valor de α Є [-1,1]? ¿Se produce alguna bifurcación? Para α = 2, averiguar la estabilidad y el periodo de las órbitas periódicas existentes. Dibuja la trayectoria y la órbita correspondiente a la condición inicial y'(0) = 1, y(0) = 1. Obtener también el diagrama de y frente al tiempo t Є [0,40] ¿Qué ocurre con esta curva solución cuando t → ±∞?

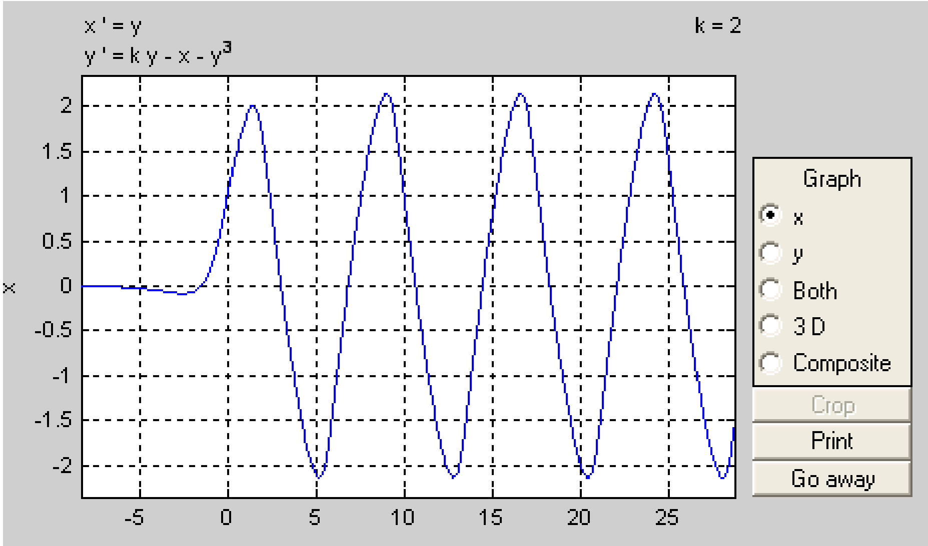
Para resolver este problema se utiliza el pplane7, fijo los datos y obtenemos:



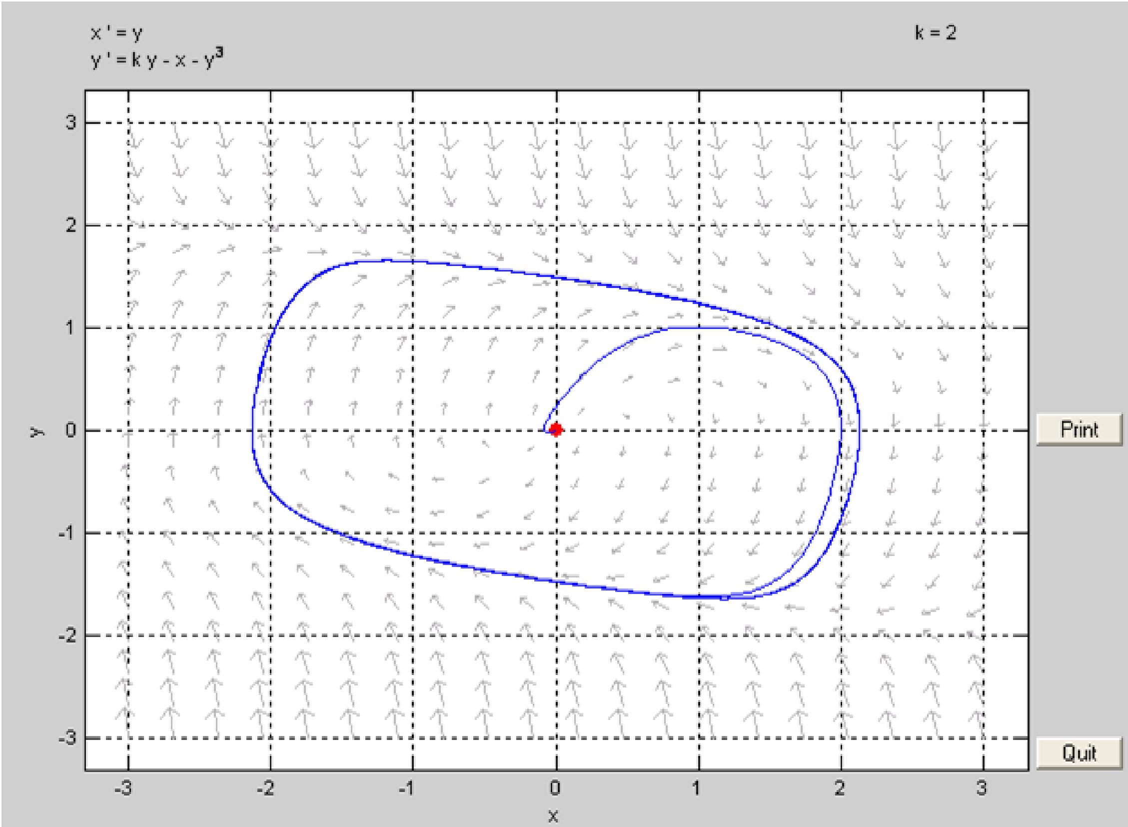


Se produce una bifurcación transcrítica, ya que lo único que cambia es la estabilidad de los puntos de equilibrio.

α=2: Puntos de equilibrio → (0,0) Foco inestable.
Siendo aproximadamente el periodo de 7 unidades.
Para t → -∞, tiende a cero y para t → ∞, y oscila entre -2.1 y 2.1.



En la siguiente gráfica se visualizan la trayectoria y la órbita correspondiente a las condiciones iniciales pedidas.



Problema 3:

La temperatura u(x,t) en una barra de sección transversal constante y material conductor homogéneo, está gobernada por la ecuación del calor unidimensional; con condiciones de contorno e iniciales, dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + e^{-t}\cdot(2-t)\cdot(x-1), \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0,t) = e^{-t}\cdot(1-t); \quad u(1,t) = 0; \quad t \geq 0,$$

$$u(x,0) = 1 - x + sen(\pi t), \quad 0 < x < 1,$$

Realizar los cálculos con error de truncamiento menor que 10^{-2} y mediante un método incondicionalmente estable.

a) Calcular u(x,1) y dibujarla (x € [0,1]).

Como podemos observar es un problema de calor, donde las condiciones de contorno son Dirichlet- Dirichlet y lo resolvemos por el método Implícito.

Primero definimos los subprogramas que se van a utilizar.

>> edit aa.m

```
function y=aa(t)
y=exp(-t).*(1-t);
```

>> edit bb.m

```
function y=bb(t)
y=0;
```

>> edit gg.m

```
function y=gg(x,t)
y=exp(-t).*(2-t).*(x-1);
```

>> edit ff.m

```
function y=ff(x)
y=1-x+sin(pi.*x);
```

Para un error de truncamiento menor que 10^{-2}, se ha escogido unos valores de: m =10; n =110.

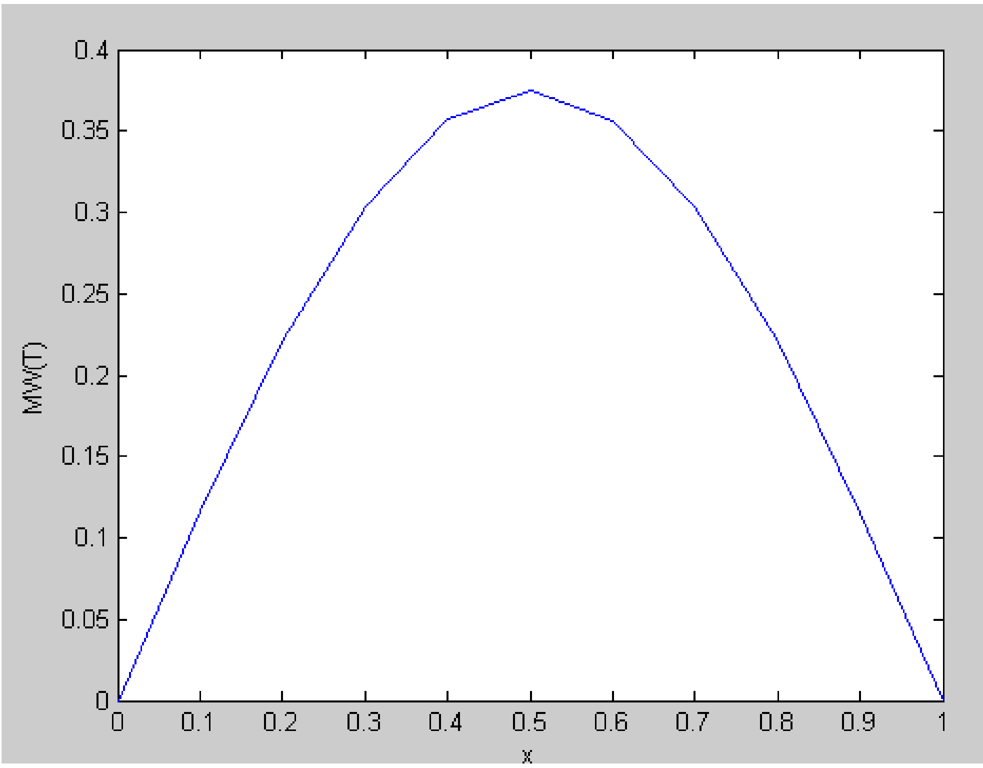
Ejecuto el programa principal:

>> [D,MW]=calorIMDDmatriz2(1/pi,1,10,110,1,0,0)

```
       x              MW (T)
------------------------------------------

D =
       0         0
  0.1000    0.1163
  0.2000    0.2210
  0.3000    0.3039
  0.4000    0.3570
  0.5000    0.3751
  0.6000    0.3566
  0.7000    0.3032
  0.8000    0.2202
  0.9000    0.1158
  1.0000         0

MW =…
```



Esta grafica muestra la representación de la temperatura a lo largo de toda la barra para el instante T =1

b) Calcular $u\left(\frac{1}{2},t\right)$, t Є [0,1] y dibujarla.

Para calcular la temperatura en el punto 0.5 en el intervalo de tiempo [0,1] hago las siguientes operaciones:

```
>> [a,b]=size(MW)
```

a = 111

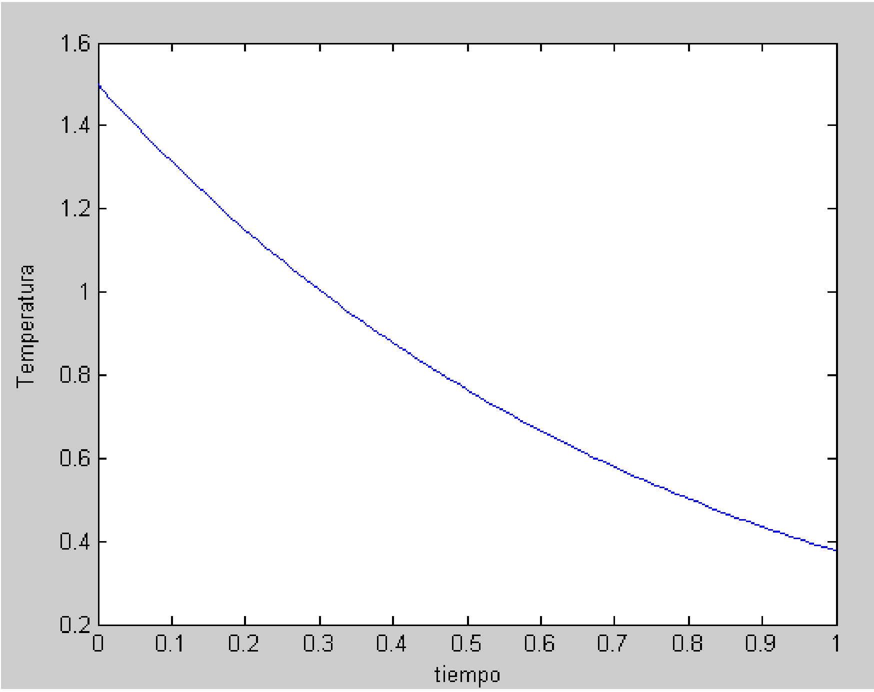
b = 11

$$\frac{11}{2} = 5{,}5 \ \rightarrow 6$$

>> mitad=MW(:,6);

>> t=linspace(0,1,111);

>> plot(t,mitad)



Esta grafica muestra la representación de la temperatura en el punto x =0.5 para el intervalo de tiempo [0,1]

c) Estimar $\lim_{t\to\infty} u\left(\frac{1}{2}, t\right)$.

Resolvemos como en los dos apartados anteriores, pero ahora con un tiempo infinito. En este caso he dado un tiempo de 1000000 s.

>> [D,MW]=calorIMDDmatriz2(1/pi,1,10,110,1000000,0,0)

>> [a,b]=size(MW)

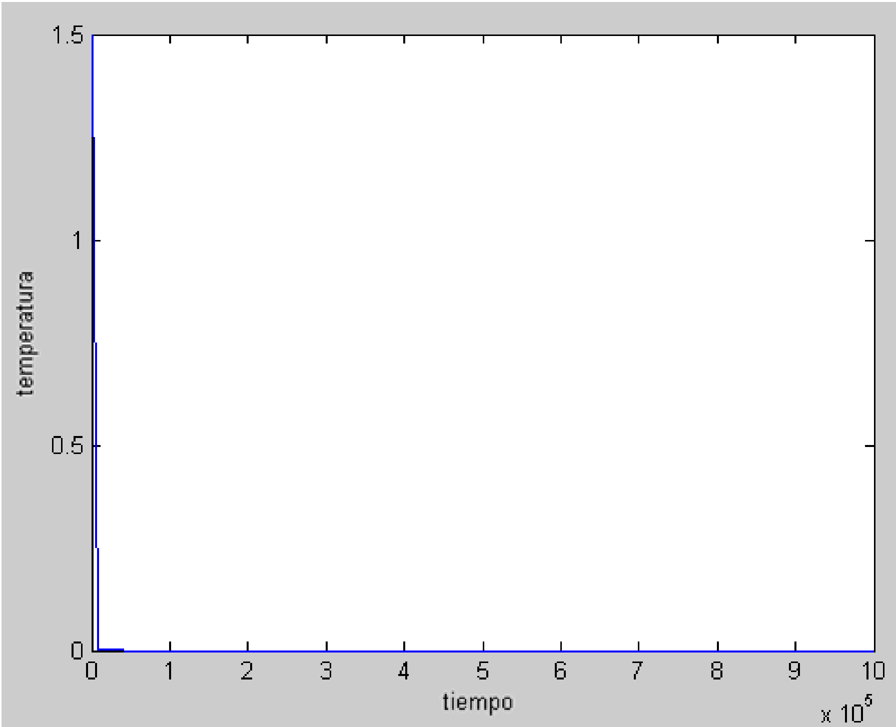
a = 111

b = 11

```
>> mitad=MW(:,6);

>> t=linspace(0,1000000,111);

>> plot(t,mitad)
```



En la presente gráfica se muestra para un tiempo t =1000000 s, como la función tiende a cero. Por lo que el límite en el infinito tiende a cero.

d) Calcular $\max_{x,t\in[0,1]} u(x,t)$.

Ejecuto el programa:

```
>> [maxi,listamaxi]=maxim(MW,1,10,110,1)

maxi = 1.5511

listamaxi = 0.4000         0
```

Se obtiene el máximo en el punto 0.4, para el instante t =0, siendo el valor del máximo: 1.5511

Problema 4:

Representemos con u el potencial electroestático entre dos esferas metálicas concéntricas de radio R_1 y R_2 con $R_1<R_2$, tales que el potencial de la esfera interior se mantenga constante en V_1 voltios y el potencial de la esfera exterior sea 0 voltios. El potencial de la región situada entre ambas esferas está regido por la ecuación de Laplace, que en esta aplicación particular se reduce a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad u(R_1) = V_1, \quad u(R_2) = 0$$

Suponga que $R_1 = 2$ pulgadas, $R_2 = 4$ pulgadas y que $V_1 = 110$ voltios.

a) Aproxime u(3) y u'(3) por medio del algoritmo del disparo lineal, tomando n=10, 20 y 40.

b) Compare los resultados obtenidos en el apartado (a) con el potencial real

$$u(r) = \frac{V_1 R_1}{r}\left(\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}\right)$$

Primero definimos los subprogramas que se van a utilizar.

>> edit ftysis1.m

```
function Z=ftysis1(t,z)
u1=z(1);
u2=z(2);
Z=[u2,(-2./t).*u2]';
```

>>edit ftysis2.m

```
function Z=ftysis2(t,z)
v1=z(1);
v2=z(2);
Z=[u2,(-2./t).*u2]';
```

>> edit potencialreal.m

```
function S=potencialreal(t)
S=110*2./t.*((4-t)./2);
```

Ejecutamos el programa y cogemos los valores u (3) y u'(3).

>> disparo(' ftysis1',' ftysis2',2,4,110,0,10)

>> disparo(' ftysis1',' ftysis2',2,4,110,0,20)

>> disparo(' ftysis1',' ftysis2',2,4,110,0,40)

Obtenemos también la potencia real y la comparamos con los valores obtenidos.

$$u(3) = \frac{110 * 2}{3}\left(\frac{4-3}{4-2}\right) = \frac{110}{3} = \ 36.666666666667$$

N	U(3)	U'(3)	U(3)*	Error
10	36.666665363108	-48.888887573957	36.666666666667	$1.303559\text{x}10^{-6}$
20	36.666665363108	-48.888887573957	36.666666666667	$1.303559\text{x}10^{-6}$
40	36.666665363108	-48.888887573957	36.666666666667	$1.303559\text{x}10^{-6}$

*** Potencia real**

Se obtiene una buena aproximación a la solución real por el método de disparo.