EL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS

P3C

Nicolás Magro Garrido
UHU – 4º Ingeniería Industrial

ECUACIONES DIFERENCIALES Y MÉTODOS NUMÉRICOS

JUSTIFICACIÓN

Responder a las siguientes curiosidades:

- ¿como se mueven masas (posiciones y velocidades)?
- ¿Como se mueve el centro de masas?
- ¿Como varia la energía cinética?
- ¿Como varia la energía potencial?
- ¿Se conserva la energía del sistema?

INTRODUCCIÓN

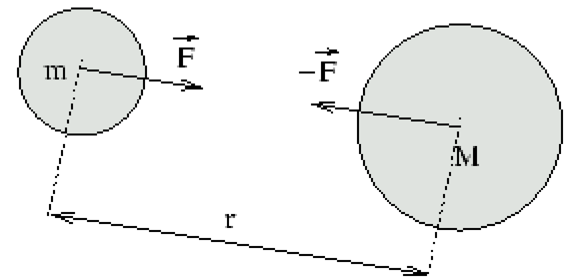
- Cuando se mueven tres cuerpos bajo la acción de su campo gravitatorio mutuo, como el sistema Sol-Tierra-Luna, la fuerza sobre cada cuerpo es justamente la suma vectorial de las fuerzas gravitatorias ejercidas por los otros dos. Así las ecuaciones de movimiento son fáciles de escribir pero difíciles de resolver ya que no son lineales. De hecho, es bien conocido que la dinámica del problema de los tres cuerpos de la mecánica clásica es una dinámica caótica.
- Desde la época de Newton se ha intentado hallar soluciones matemáticamente exactas del problema de los tres cuerpos, hasta que a finales del siglo XIX Henri Poincaré demostró en un célebre trabajo que era imposible (sin embargo, se mostró también que por medio de series infinitas convergentes se podía solucionar el problema). Sólo en algunas circunstancias son posibles ciertas soluciones sencillas. Por ejemplo, si la masa de uno de los tres cuerpos es mucho menor que la de los otros dos (problema conocido como *problema restringido de los tres cuerpos*), el sistema puede ser reducido a un problema de dos cuerpos más otros problema de un sólo cuerpo.

PROCEDIMIENTO

1. PLATEAMOS MODELO
2. ECUACIONES DE MOVIMIENTO
3. PREPARAMOS LAS ECUACIONES
4. RESOLVEMOS ECUACIONES (Cálculo Numérico)
5. CALCULOS DE VARIABLES DEPENDIENTES:
   - Energía Cinética
   - Energía Potencial
   - Energía total del sistema

MODELO: Ley de la Gravitación Universal de Newton

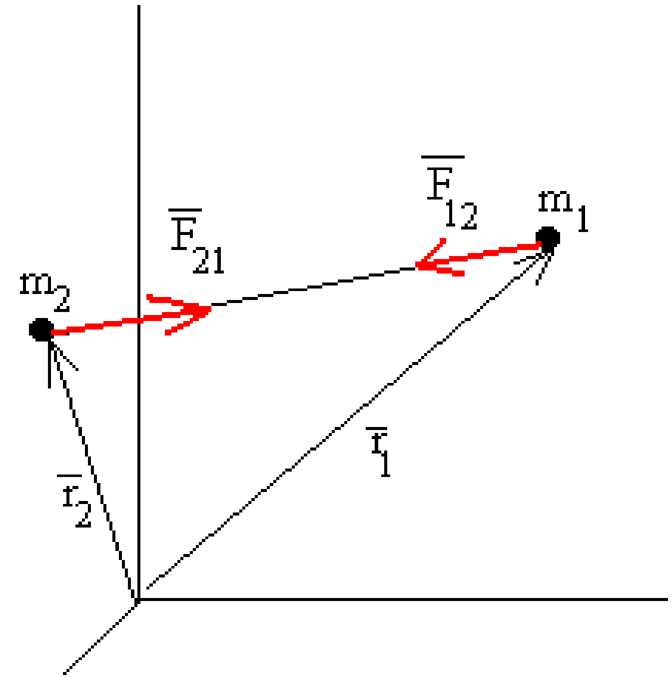
- La Ley de la Gravitación Universal de Newton establece que la fuerza que ejerce una partícula puntual con masa m_1 sobre otra con masa m_2 es directamente proporcional al producto de las masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa; donde **G** es la constante de gravitación universal. ($6{,}674 \times 10^{-11}$ Nm2/kg2, aproximadamente).



$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

MODELO: Ley de la Gravitación Universal de Newton

- Expresado en forma vectorial; Donde u_{12} es el vector unitario que va de la partícula 1 a la 2 (con signo negativo por que fuerza es en dirección contraria a dicho vector)
- Como: $$u_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|}$$



$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)$$

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}\hat{u_{12}}$$

MODELO: Segunda ley de Newton

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Para m1

$$m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}$$

Igualando

$$m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Simplificando

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Nos dice que *la fuerza neta aplicada sobre un cuerpo es proporcional a la aceleración que adquiere dicho cuerpo*. La constante de proporcionalidad es la *masa del cuerpo.*

Para m2

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -G \frac{m_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

MODELO: Para 3 masas

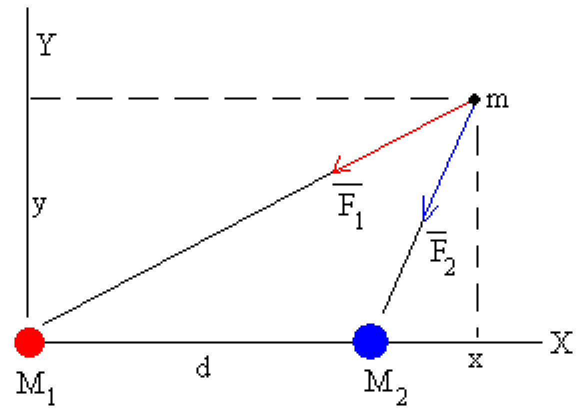
$$m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

Igualando

$$m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 = -G\frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - G\frac{m_1 m_3}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\right|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)$$

Simplificando

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -G\left(\frac{m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + \frac{m_3}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\right|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)\right)$$



MODELO: Para 3 masas

De igual forma
para m2 y m3

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -G\left(\frac{m_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{m_3}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_3\right|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)\right)$$

$$\ddot{\vec{r}}_3 = -G\left(\frac{m_2}{\left|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\right|^3}(\vec{r}_3 - \vec{r}_2) + \frac{m_1}{\left|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\right|^3}(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)\right)$$

MODELO: Para N masas

De forma general

$$\ddot{\vec{r}}_i = -G\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{m_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|^3}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\right); \qquad i \neq j$$

Ecuaciones: Planteamiento

$$\ddot{\vec{r}}_i = -G\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{m_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|^3}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\right); \qquad i \neq j$$

Transformamos a un sistema de primer grado

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i \\ \dot{\vec{v}}_i = -G\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{m_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|^3}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\right); \end{cases} \qquad i \neq j$$

Ecuaciones: Planteamiento 2 masas

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i \\ \dot{\vec{v}}_i = -G \sum_{j=1}^{N} \left(\dfrac{m_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right); \end{cases} \qquad i \neq j$$

4 ecuaciones de vectores de 3 dimensiones = 12 EDO

Para la primera masa i=1

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}_1 = \vec{v}_1 \\ \dot{\vec{v}}_1 = -G \dfrac{m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \end{cases}$$

Para la primera masa i=2

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}_2 = \vec{v}_2 \\ \dot{\vec{v}}_2 = -G \dfrac{m_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \end{cases}$$

Ecuaciones: Para 3 masas

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i \\ \dot{\vec{v}}_i = -G\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{m_j}{\left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right|^3}(\vec{r}_j - \vec{r}_i)\right); \end{cases} \qquad i \neq j$$

6 ecuaciones de vectores de 3 dimensiones = 18 EDO

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}_1 = \vec{v}_1 \\ \dot{\vec{v}}_1 = -G\left(\frac{m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + \frac{m_3}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\right|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)\right) \end{cases}$$

Para i=1 (j=2,3)

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}_2 = \vec{v}_2 \\ \dot{\vec{v}}_2 = -G\left(\frac{m_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{m_3}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_3\right|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)\right) \end{cases}$$

Para i=2 (j=1,3)

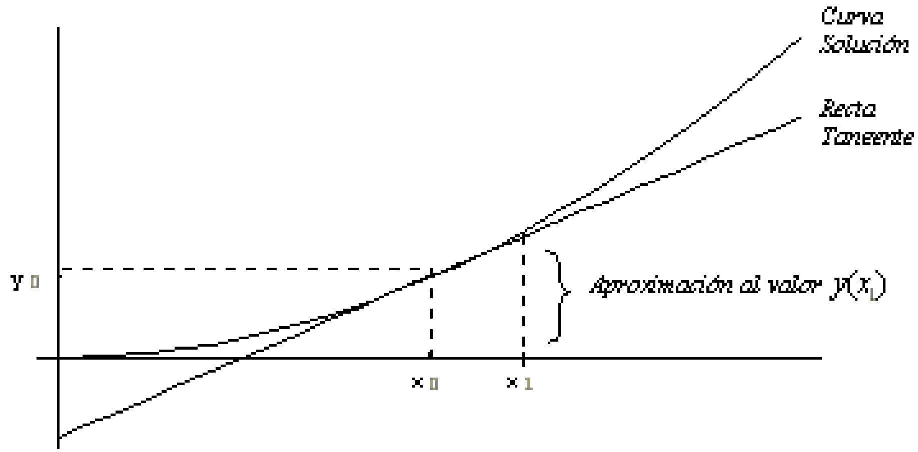
$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}_3 = \vec{v}_3 \\ \dot{\vec{v}}_3 = -G\left(\frac{m_2}{\left|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\right|^3}(\vec{r}_3 - \vec{r}_2) + \frac{m_1}{\left|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\right|^3}(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)\right) \end{cases}$$

Para i=3 (j=1,2)

Cálculo numérico (ideas)

- Método de Euler

$y_1 = m.h + y_0$



- El integrador ode45 es un integrador de un paso basado en la fórmula explícita Runge-Kutta-Fehlberg de orden 4 o 5. Presenta una gran rapidez de cálculo.

Cálculo numérico (ODE45)

[t,y]=ode45('función',[t0 tf],[x0 y0])

Vector con los tiempos y vector de valores de las variables

Función (pendientes del punto)

Vector de tiempos

Vector de valores iníciales

Variables Dependientes:
Centro de Masas del Sistema

$$rcm = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Para dos cuerpos

Para para tres cuerpos

$$r_{cm} = \frac{m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot r_2}{m_1 + m_2}$$

$$r_{cm} = \frac{m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot r_2 + m_3 \cdot r_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Variables Dependientes:
Energía Cinética (Masas y del Sistema)

$$Ec = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Para cada cuerpo

Para el sistema

$$Ec_i = \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^{\,2}$$

$$Ec_T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^{\,2}$$

Variables Dependientes:
Energía Potencial (Masas y Sistema)

$$Ep = F \cdot d = -G\frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2}\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right| = -G\frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|}$$

Para un sistema de 3 masas

$$Ep_1 = F_{12} \cdot d_{12} + F_{13} \cdot d_{13} = -G\frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|} - G\frac{m_1 m_3}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\right|}$$

Así

$$Ep_1 = -Ep_{12} - Ep_{13}$$

En general

$$Ep_i = -\sum_{j=1}^{N} Ep_{ij} \quad i \neq j$$

Variables Dependientes:
Energía Potencial (Masas y Sistema)

$$Ep_i = -\sum_{j=1}^{N} Ep_{ij} \quad i \neq j$$

Para cada cuerpo (tres masas)

$$Ep_1 = Ep_{12} + Ep_{13}$$

$$Ep_2 = Ep_{21} + Ep_{23}$$

$$Ep_3 = Ep_{31} + Ep_{32}$$

Para el sistema

$$Ep_T = Ep_{12} + Ep_{13} + Ep_{23}$$

Variables Dependientes:
Energía total del Sistema

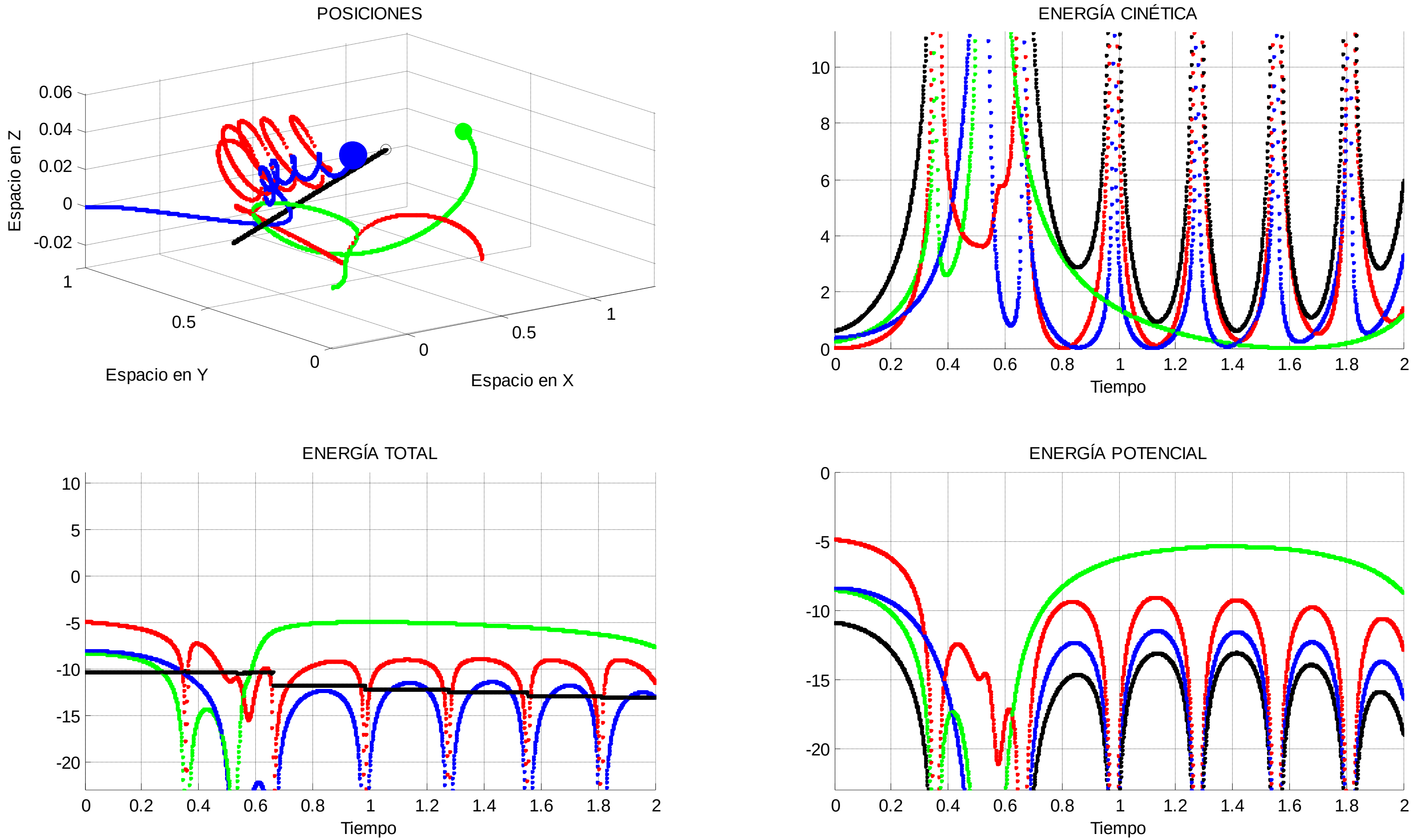
$$E_T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^{\,2} + \sum_{i=1}^{N} Ep_{ij} \quad i \neq j$$

Para dos masas

$$E_T = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^{\,2} + Ep_{12} = Cte.$$

Para tres masa

$$E_T = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^{\,2} + \frac{1}{2} m_3 \cdot v_3^{\,2} + Ep_{12} + Ep_{13} + Ep_{23} = Cte.$$


POSICIONES
Espacio en Z
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
1
0.5
0
Espacio en Y
0
0.5
1
Espacio en X
ENERGÍA CINÉTICA
10
8
6
4
2
0
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2
Tiempo
ENERGÍA TOTAL
10
5
0
-5
-10
-15
-20
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2
Tiempo
ENERGÍA POTENCIAL
0
-5
-10
-15
-20
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2
Tiempo

MUCHAS GRACIAS

- ¡Espero no haber aburrido!

ANEXOS:

Función para la ecuación de DOS cuerpos:

```
%Funcion para dos masas.
function f=dosc(t,u)
%Parametros
global m1 m2 G

r1=u(1:3);
dr1=u(4:6);
r2=u(7:9);
dr2=u(10:12);

dv1=-G*m2*(r1-r2)/(norm(r1-r2))^3;
dv2=-G*m1*(r2-r1)/(norm(r1-r2))^3;

f=[dr1(1)
   dr1(2)
   dr1(3)
   dv1(1)
   dv1(2)
   dv1(3)
   dr2(1)
   dr2(2)
   dr2(3)
   dv2(1)
   dv2(2)
   dv2(3)];
```

Script de resolución y graficado de DOS cuerpos:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   Calculo de un sistema de dos cuerpos
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear %Borramos el espacio de trabajo
clc %Borramos la ventana de comandos
clf %Borramos figuras

%--Codiciones inciales-----------------------------------------------------
global G m1 m2; %Global para que las pueda ver la función
G=1; %Gravedad
m1=2; %Masa del cuerpo 1
m2=1; %Masa del cuerpo 2
tf=2; %Tiempo final
r1=[.4 0 0] %Posición del cuerpo 1
v1=[0 .01 .1] %Velocidad del cuerpo 1
r2=[-.4 0 0] %Posicicón del cuerpo 2
v2=[.5 -.03 0] %Velocidad del cuerpo 2

%--Calculo numerico---------------------------------------------------------
u=[r1,v1,r2,v2]; %Juntamos las condiciones inciales para pasarla a ODE45
temp=0:0.0005:tf; %Nos fabricamos nuestra escala de tiempos
[t,y]=ode45('dosc',temp,u); %Llamamos a la función de integración númerica

%--Calculamos la Energía cinética------------------------------------------
Ec1=0.5*m1*(y(:,4).^2+y(:,5).^2+y(:,6).^2);
Ec2=0.5*m2*(y(:,10).^2+y(:,11).^2+y(:,12).^2);

%--Calculamos la Energía potencial-----------------------------------------
Ep12=-G*m1*m2*((sum(([y(:,1),y(:,2),y(:,3)] -[y(:,7),y(:,8),y(:,9)]).^2,2)).^-0.5);


%--Preparación de la grafica-----------------------------------------------
figure(1);
subplot(2,2,1)%Grafico de POSICIONES-------------------------------------
%Calculamos el tamaño de los ejes para la gráfica de POSICIONES
xmin=min(min(y(:,1)),min(y(:,7)));
xmax=max(max(y(:,1)),max(y(:,7)));
ymin=min(min(y(:,2)),min(y(:,8)));
ymax=max(max(y(:,2)),max(y(:,8)));
zmin=min(min(y(:,3)),min(y(:,9)));
zmax=max(max(y(:,3)),max(y(:,9)));
axis([xmin, xmax, ymin, ymax,zmin,zmax]); %Aplicamos los ejes calculados
%Aplicamos estiquetas al Grafico y a los ejes
Title('POSICIONES');
xlabel('Espacio en X');
ylabel('Espacio en Y');
zlabel('Espacio en Z');
grid; %Aplicamos regilla al gráfico.
hold on;

%Graficamos las condiciones iniciales de POSICIONES
p1=plot3(y(1,1),y(1,2),y(1,3), 'o r','MarkerSize',10*m1,'MarkerFaceColor', 'r');
p2=plot3(y(1,7),y(1,8),y(1,9), 'o g','MarkerSize',10*m2,'MarkerFaceColor', 'g');
cm=(m1*r1+m2*r2)/(m1+m2); %Calculamos centro de masas inicial
pcm=plot3(cm(1),cm(2),cm(3),'ok');
```

```
subplot(2,2,2)%Grafico de ENERGIA CINETICA--------------------------------
%Calculamos el tamaño de los ejes para la gráfica de E. CINETICA
xmin=0;
xmax=tf;
ymin=0;
ymax=mean(Ec1+Ec2);
axis([xmin, xmax, ymin, ymax]); %Aplicamos los ejes calculados
%Aplicamos estiquetas al Grafico y a los ejes
Title('ENERGÍA CINÉTICA');
xlabel('Tiempo');
grid; %Aplicamos regilla al gráfico.
hold on;

subplot(2,2,4)%Grafico de ENERGIA POTENCIAL-------------------------------
%Calculamos el tamaño de los ejes para la gráfica de E. POTENCIAL
xmin=0;
xmax=tf;
ymin=mean(Ep12);
ymax=0;
axis([xmin, xmax, ymin, ymax]); %Aplicamos los ejes calculados
%Aplicamos estiquetas al Grafico y a los ejes
Title('ENERGÍA POTENCIAL');
xlabel('Tiempo');
grid; %Aplicamos regilla al gráfico.
hold on;

subplot(2,2,3)%Grafico de ENERGIA TOTAL------------------------------------
%Calculamos el tamaño de los ejes para la gráfica de E. TOTAL
xmin=0;
xmax=tf;
ymin=mean(Ep12);
ymax=mean(Ec1+Ec2);
axis([xmin, xmax, ymin, ymax]); %Aplicamos los ejes calculados
%Aplicamos estiquetas al Grafico y a los ejes
Title('ENERGÍA TOTAL');
xlabel('Tiempo');
grid; %Aplicamos regilla al gráfico.
hold on;
%-------------------------------------------------------------------------



pause %paramos hasta pulsar una tecla
n=length(t); %Creamos un indice para cada tiempo calculado y graficamos
for i=1:3:n
    %Graficamos POSICION
    subplot(2,2,1);
    delete(p1,p2,pcm); %Borramos posicion anterior
    p1=plot3(y(i,1),y(i,2),y(i,3),'or','MarkerSize',10*m1,'MarkerFaceColor', 'r');
    plot3(y(i,1),y(i,2),y(i,3),'r');
    p2=plot3(y(i,7),y(i,8),y(i,9),'og','MarkerSize',10*m2,'MarkerFaceColor', 'g');
    plot3(y(i,7),y(i,8),y(i,9),'g');
    cm=(m1*y(i,1:3)+m2*y(i,7:9))/(m1+m2);
    pcm=plot3(cm(1),cm(2),cm(3),'ok');
    plot3(cm(1),cm(2),cm(3),'k');

    %Graficamos ENERGIA CINETICA
    subplot(2,2,2);
    plot(t(i),Ec1(i,1),'r'); %Energia Cinetica de masa 1
    plot(t(i),Ec2(i,1),'g'); %Energia Cinetica de masa 2
    plot(t(i),(Ec1(i,1)+Ec2(i,1)),'k'); %Energia Cinetica total
```

```
    %Graficamos ENERGIA POTENCIAL
    subplot(2,2,4);
    plot(t(i),Ep12(i,1),'k'); %Energia Potencial de masa 1

    %Graficamos ENERGIA TOTAL
    subplot(2,2,3);
    plot(t(i),(Ec1(i,1)+Ec2(i,1)+Ep12(i,1)),'k'); %Energia total


    pause(0.001); %Velocidad de presentación
end
```

Función extendida para la ecuación de TRES cuerpos:

```
%Funcion para TRES masas.
function f=tresc(t,u)
%Parametros
global m1 m2 m3 G

r1=u(1:3);
dr1=u(4:6);
r2=u(7:9);
dr2=u(10:12);
r3=u(13:15);
dr3=u(16:18);
dv1=-G*(m2*(r1-r2)/(norm(r1-r2))^3+m3*(r1-r3)/(norm(r1-r3))^3);
dv2=-G*(m1*(r2-r1)/(norm(r2-r1))^3+m3*(r2-r3)/(norm(r2-r3))^3);
dv3=-G*(m2*(r3-r2)/(norm(r3-r2))^3+m1*(r3-r1)/(norm(r3-r1))^3);

f=[dr1(1)
   dr1(2)
   dr1(3)
   dv1(1)
   dv1(2)
   dv1(3)
   dr2(1)
   dr2(2)
   dr2(3)
   dv2(1)
   dv2(2)
   dv2(3)
   dr3(1)
   dr3(2)
   dr3(3)
   dv3(1)
   dv3(2)
   dv3(3)];
```

Script de resolución y graficado de TRES cuerpos:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   Calculo de un sistema de tres cuerpos
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear %Borramos el espacio de trabajo
clc %Borramos la ventana de comandos
clf %Borramos figuras

%--Codiciones inciales------------------------------------------------------
global G m1 m2 m3; %Global para que las pueda ver la función
G=1; %Gravedad
m1=1; %Masa del cuerpo 1
m2=2; %Masa del cuerpo 2
m3=3; %Masa del cuerpo 3
tf=2; %Tiempo final
r1=[.4 0 0] %Posición del cuerpo 1
v1=[0 .01 .1] %Velocidad del cuerpo 1
r2=[-.4 0 0] %Posicicón del cuerpo 2
v2=[.5 -.03 0] %Velocidad del cuerpo 2
r3=[-.4 1 0] %Posicicón del cuerpo 2
v3=[.5 .03 0] %Velocidad del cuerpo 2

%--Calculo numerico---------------------------------------------------------
u=[r1,v1,r2,v2,r3,v3]; %Juntamos las condiciones inciales para pasarla a ODE45
temp=0:0.001:tf; %Nos fabricamos nuestra escala de tiempos
[t,y]=ode45('tresc',temp,u); %Llamamos a la función de integración númerica

%--Calculamos la Energía cinética-----------------------------------------
Ec1=0.5*m1*(y(:,4).^2+y(:,5).^2+y(:,6).^2);
Ec2=0.5*m2*(y(:,10).^2+y(:,11).^2+y(:,12).^2);
Ec3=0.5*m3*(y(:,16).^2+y(:,17).^2+y(:,18).^2);

%--Calculamos la Energía potencial----------------------------------------
Ep12=-G*m1*m2*((sum(([y(:,1),y(:,2),y(:,3)]-[y(:,7),y(:,8),y(:,9)]).^2,2)).^-0.5);
Ep13=-G*m1*m3*((sum(([y(:,1),y(:,2),y(:,3)]-[y(:,13),y(:,14),y(:,15)]).^2,2)).^-0.5);
Ep23=-G*m2*m3*((sum(([y(:,7),y(:,8),y(:,9)] -[y(:,13),y(:,14),y(:,15)]).^2,2)).^-0.5);


%--Preparación de la grafica-----------------------------------------------
figure(1);
subplot(2,2,1)%Grafico de POSICIONES------------------------------------
%Calculamos el tamaño de los ejes para la gráfica de POSICIONES
xmin=min(min([y(:,1),y(:,7),y(:,13)],[],1));
xmax=max(max([y(:,1),y(:,7),y(:,13)],[],1));
ymin=min(min([y(:,2),y(:,8),y(:,14)],[],1));
ymax=max(max([y(:,2),y(:,8),y(:,14)],[],1));
zmin=min(min([y(:,3),y(:,9),y(:,15)],[],1));
zmax=max(max([y(:,3),y(:,9),y(:,15)],[],1));
axis([xmin, xmax, ymin, ymax,zmin,zmax]); %Aplicamos los ejes calculados
%Aplicamos estiquetas al Grafico y a los ejes
Title('POSICIONES');
xlabel('Espacio en X');
ylabel('Espacio en Y');
zlabel('Espacio en Z');
grid; %Aplicamos regilla al gráfico.
hold on;

%Graficamos las condiciones iniciales de POSICIONES
```

```
p1=plot3(y(1,1),y(1,2),y(1,3), 'o r','MarkerSize',5*m1,'MarkerFaceColor','r');
p2=plot3(y(1,7),y(1,8),y(1,9), 'o g','MarkerSize',5*m2,'MarkerFaceColor','g');
p3=plot3(y(1,13),y(1,14),y(1,15), 'o b','MarkerSize',5*m3,'MarkerFaceColor','b');
cm=(m1*r1+m2*r2+m3*r3)/(m1+m2+m3); %Calculamos centro de masas inicial
pcm=plot3(cm(1),cm(2),cm(3),'ok');

subplot(2,2,2)%Grafico de ENERGIA CINETICA--------------------------------
%Calculamos el tamaño de los ejes para la gráfica de E. CINETICA
xmin=0;
xmax=tf;
ymin=0;
ymax=mean(Ec1+Ec2+Ec3);
axis([xmin, xmax, ymin, ymax]); %Aplicamos los ejes calculados
%Aplicamos estiquetas al Grafico y a los ejes
Title('ENERGÍA CINÉTICA');
xlabel('Tiempo');
grid; %Aplicamos regilla al gráfico.
hold on;

subplot(2,2,4)%Grafico de ENERGIA POTENCIAL-------------------------------
%Calculamos el tamaño de los ejes para la gráfica de E. POTENCIAL
xmin=0;
xmax=tf;
ymin=mean(Ep12+Ep13+Ep23);
ymax=0;
axis([xmin, xmax, ymin, ymax]); %Aplicamos los ejes calculados
%Aplicamos estiquetas al Grafico y a los ejes
Title('ENERGÍA POTENCIAL');
xlabel('Tiempo');
grid; %Aplicamos regilla al gráfico.
hold on;

subplot(2,2,3)%Grafico de ENERGIA TOTAL------------------------------------
%Calculamos el tamaño de los ejes para la gráfica de E. TOTAL
xmin=0;
xmax=tf;
ymin=mean(Ep12+Ep13+Ep23);
ymax=mean(Ec1+Ec2++Ec3);
axis([xmin, xmax, ymin, ymax]); %Aplicamos los ejes calculados
%Aplicamos estiquetas al Grafico y a los ejes
Title('ENERGÍA TOTAL');
xlabel('Tiempo');
grid; %Aplicamos regilla al gráfico.
hold on;
%--------------------------------------------------------------------------


pause %paramos hasta pulsar una tecla
n=length(t); %Creamos un indice para cada tiempo calculado y graficamos
for i=1:3:n
    %Graficamos POSICION
    subplot(2,2,1);
    delete(p1,p2,p3,pcm); %Borramos posicion anterior
    p1=plot3(y(i,1),y(i,2),y(i,3),'or','MarkerSize',5*m1,'MarkerFaceColor','r');
    plot3(y(i,1),y(i,2),y(i,3),'r');
    p2=plot3(y(i,7),y(i,8),y(i,9),'og','MarkerSize',5*m2,'MarkerFaceColor','g');
    plot3(y(i,7),y(i,8),y(i,9),'g');
    p3=plot3(y(i,13),y(i,14),y(i,15),'ob','MarkerSize',5*m3,'MarkerFaceColor','b');
    plot3(y(i,13),y(i,14),y(i,15),'b');
    cm=(m1*y(i,1:3)+m2*y(i,7:9)+m3*y(i,13:15))/(m1+m2+m3);
```

```
    pcm=plot3(cm(1),cm(2),cm(3),'ok');
    plot3(cm(1),cm(2),cm(3),'k');

    %Graficamos ENERGIA CINETICA
    subplot(2,2,2);
    plot(t(i),Ec1(i,1),'r'); %Energia Cinetica de masa 1
    plot(t(i),Ec2(i,1),'g'); %Energia Cinetica de masa 2
    plot(t(i),Ec3(i,1),'b'); %Energia Cinetica de masa 3
    plot(t(i),(Ec1(i,1)+Ec2(i,1)+Ec3(i,1)),'k'); %Energia Cinetica total

    %Graficamos ENERGIA POTENCIAL
    subplot(2,2,4);
    plot(t(i),Ep12(i,1)+Ep13(i,1),'r'); %Energia Potencial de masa 1
    plot(t(i),Ep12(i,1)+Ep23(i,1),'g'); %Energia Potencial de masa 2
    plot(t(i),Ep13(i,1)+Ep23(i,1),'b'); %Energia Potencial de masa 3
    plot(t(i),Ep12(i,1)+Ep13(i,1)+Ep23(i,1),'k'); %Energia Potencial total

    %Graficamos ENERGIA TOTAL
    subplot(2,2,3);
    plot(t(i),Ec1(i,1)+Ep12(i,1)+Ep13(i,1),'r'); %Energia Total de masa 1
    plot(t(i),Ec2(i,1)+Ep12(i,1)+Ep23(i,1),'g'); %Energia Total de masa 2
    plot(t(i),Ec3(i,1)+Ep13(i,1)+Ep23(i,1),'b'); %Energia Total de masa 3
    %Energia total sistema
    plot(t(i),(Ec1(i,1)+Ec2(i,1)+Ec3(i,1)+Ep12(i,1)+Ep13(i,1)+Ep23(i,1)),'k');


    pause(0.0001); %Velocidad de presentación
end
```