16 de mayo de 2019

Capítulo 15

Teoremas clásicos de variable compleja

En este capítulo exponemos los resultados de la teoría de variable compleja que usamos con frecuencia en el estudio de la dinámica compleja. La mayoría son muy conocidos y aparecen en cualquier manual sobre la materia, pero nos ha parecido que su inclusión puede facilitar la lectura de esta obra. Sólo incluimos las demostraciones de aquellos resultados que no son fáciles de encontrar en los manuales clásicos como el bien conocido libro de Ahlfors ??

15.1. Notaciones y terminología

Denotaremos el disco de centro z_0 y radio $r > 0$ por $\mathbb{D}(z_0, r)$ y si el centro es el origen, simplemente por $\mathbb{D}_r$. Finalmente, el disco unidad se denotará por $\mathbb{D}$.

Un conjunto abierto y conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dirá que es una región. Si $U \subset \mathbb{C}$ es un abierto no conexo, podemos definir las componentes conexas de U como sigue. Si $z, w \in U$, diremos que z y w están conectados en U, si existe un arco γ en U que une z con w y escribiremos $z \sim w$. Se trata de una relación de equivalencia que produce una partición de U en una serie de subconjuntos disjuntos de U. Estos conjuntos son las componentes conexas de U. Cada punto z de U pertenece a una de estas componentes que denotamos por $C(z)$. Por definición, $C(z) = \{w \in \mathbb{C} : z \sim w\}$. Estos conjunto son obviamante abiertos y conexos y tienen la siguiente propiedad de maximalidad: si $z \in$

$A \subset U$ y A es arcoconexo, entonces $A \subset C(z)$. El número de componentes conexas puede ser finito o infinito, pero desde luego numerable, pues basta considerar las componentes conexas $C(z)$ de los $z \in U$ con partes real e imaginaria racional.

Teorema 15.1.1. *El conjunto formado por todas las raíces $n-$ésimas de la unidad es denso en la circunferencia unidad.*

DEMOSTRACIÓN: Dados $e^{2\pi i\theta}$ y $\epsilon > 0$, escogemos $\delta > 0$ de modo que $|\operatorname{sen} x| < \epsilon/2$, siempre que $|x| < \delta$. Sea $p/q \in \mathbb{Q}$ tal que $|\theta - p/q| < \delta/\pi$. Entonces, se tiene

$$|e^{2\pi i\theta} - e^{2\pi i(p/q)}|^2 = |e^{2\pi(\theta-(p/q))i} - 1|^2 = 2(1 - \cos 2\pi(\theta - p/q)) = 4\operatorname{sen}^2(\pi(\theta - p/q)),$$

de donde se sigue que

$$|e^{2\pi i\theta} - e^{2\pi i(p/q)}| = 2|\operatorname{sen}(\pi(\theta - p/q))| < \epsilon.$$

Finalmente, nótese que $e^{2\pi(p/q)i}$ es una $q-$ésima de la unidad. $\square$

Si $U \subset \mathbb{C}$ es abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ derivable en cada punto de U, diremos que f es analítica en U (u holomorfa).

15.2. Teoremas clásicos

La siguiente proposición recoge algunas de las propiedades características de las funciones analíticas complejas que usaremos.

Proposición 15.2.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ analítica.*

a) Todas las derivadas sucesivas de f son analíticas en U.

b) $f(U)$ es abierto en $\mathbb{C}$.

c) Principio del módulo máximo. *Si, además, U es acotado y f está definida y es continua en $\overline{U}$, entonces f alcanza su máximo absoluto en la frontera de U.*

Teorema 15.2.2. *(Teorema local de la función inversa) Sean f analítica en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$. Existen $\epsilon > 0$ y un entorno U de z_0 tales que $f : U \to D(z_0, \epsilon)$ es una biyección y la inversa $f^{-1} : D(z_0, \epsilon) \to U$ es analítica.*

Definición 15.2.3. *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ inyectiva. Diremos que f es bianalítica en U si f y f^{-1} son analíticas.*

Teorema 15.2.4. *(Criterio de bianaliticidad) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. f es bianalítica si y sólo si es analítica en Ω e inyectiva.*

Teorema 15.2.5. *(de la primitiva) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua. Son equivalentes:*

(i) La integral de f no depende del camino.

(ii) Para todo arco cerrado (regular a trozos) γ, se tiene $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$.

(iii) Existe primitiva de f en Ω. De hecho, escogido $z_0 \in \Omega$, la función F definida por

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f \ (z \in \Omega),$$

es una primitiva de f.

Como una aplicación de lo anterior, se verifica la fórmula de Gauss-Barrow siguiente

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(z)\,dz,$$

donde $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una región, F y f definidas en Ω con $F' = f$, $a, b \in \Omega$ y la integral se toma a lo largo de cualquier camino en Ω que une a con b.

Teorema 15.2.6. *(Principio de identidad) Sen $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y f y g definidas y analíticas en Ω y denotemos por A el subconjunto de Ω donde coinciden f y g. Si A posee algún punto de acumulación en Ω, entonces coinciden en todo Ω.*

Lema 15.2.7. *(Schwarz) Sea f analítica en el disco unidad abierto D verificando:*

a) $|f(z)| \leq 1$ y b) $f(0) = 0$.

Entonces $|f(z)| \leq |z|$ y $|f'(0)| \leq 1$. La igualdad $|f'(0)| = 1$ se da sólo si $f(z) = e^{i\theta} z$. Si $|f'(0)| < 1$, entonces $|f(z)| < |z|$ para todo $z \neq 0$.

El lema de Schwarz muestra que las funciones analíticas en regiones simplemente conexas son muy especiales. Una versión más útil de este resultado se recoge en el siguiente teorema.

Teorema 15.2.8. ?? *Sean Ω una región simplemente conexa de $\mathbb{C}$ distinta de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \Omega$ analítica. Si $z_0 \in \Omega$ es un punto fijo de f, entonces se verifican una de las condiciones siguientes:*

a) $|f'(z_0)| < 1$ y $f^n(z) \to z_0$ para todo $z \in \Omega$, o

b) $f'(z_0) = e^{i\theta}$ y f es analíticamente conjugada de $g(z) = e^{i\theta} z$ $(z \in D)$.

El caso $\Omega = \mathbb{C}$ debe ser excluido como muestra la aplicación $f(z) = az$ con $|a| > 1$.

Teorema 15.2.9. *(Rouché) Sean γ una curva simple y cerrada contenida en una región simplemente conexa Ω y f y g definidas y analíticas en Ω tales que $|g| < |f|$ sobre γ. Entonces el número de ceros de f encerrados por γ es igual al número de ceros de $f + g$ encerrados por γ, contando su multiplicidad.*

Teorema 15.2.10. *Sea $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ continua en $\overline{\mathbb{D}}$ y analítica en $\mathbb{D}$. Se verifica:*

(a) Para cada $A > 1$ la ecuación $f(z) - Az = 0$ tiene una única solución en $\mathbb{D}$.

(b) f tiene al menos un punto fijo en $\overline{\mathbb{D}}$.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que la función no es constante. Aplicando el principio del módulo máximo deducimos que $|f(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Para probar (a), dado $A > 1$, escogemos $r \in (1/A, 1)$ y denotamos por γ la circunferencia $|z| = r$. Sean $G(z) = -f(z)$ y $F(z) = Az$. Para $|z| = r$, se tiene

$$|G(z)| = |f(z)| < 1 < rA = |F(z)|,$$

y ahora basta aplicar el teorema de Rouché.

(b) Sea (A_n) una sucesión de números reales estrictamente decreciente y con límite 1. Por (a), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in \mathbb{D}$ que es solución de la ecuación $f(z) - A_n z = 0$. Existe una subsucesión de (A_n) que es convergente hacia $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$. Para simplificar, la denotamos por (A_n). Tomando límite cuando $n \to \infty$ en la igualdad $f(z_n) = A_n z_n$, se obtiene el resultado deseado.

$\square$

Teorema 15.2.11. *(Pick) Si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es analítica, se verifica*

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2} \text{ para todo } z \in \mathbb{D}.$$

Una función definida y analítica en todo el plano se denomina entera. Las funciones enteras más simples son las polinómicas. Es usual llamar trascendentes a las funciones enteras no polinómicas.

Teorema pequeño de Picard. *Una función entera no constante toma todo valor complejo salvo a lo sumo uno.*

Teorema grande de Picard. *Sea z_0 una singularidad esencial de una función f. En un entorno de z_0 f toma todo valor complejo salvo a lo sumo uno.*

Teorema 15.2.12. *Toda función entera no polinómica tiene una singularidad esencial en el punto del infinito.*

Las funciones trascendentes en un entorno de ∞ tienen un comportamiento similar al indicado en el Teorema grande de Picard.

Teorema 15.2.13. *(Weierstrass) Si una sucesión de funciones analíticas converge uniformemente, entonces sus derivadas también convergen uniformemente y la función límite es analítica.*

Teorema 15.2.14. *(Hurwitz) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y (f_n) una sucesión de funciones definidas y analíticas en Ω que converge uniformemente en Ω hacia una función f no idénticamente nula. Si γ es una curva cerrada contenida ella y su región interior en Ω y que no pasa por los ceros de f, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, f_n posee en el interior de γ el mismo número de ceros que f.*

Definición 15.2.15. *(Familias normales valoradas en $\hat{\mathbb{C}}$) Sean Ω una región de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{F}$ una familia de funciones analíticas definidas de Ω en $\hat{\mathbb{C}}$ (Ω*

puede ser igual a $\hat{\mathbb{C}}$). Diremos que la familia es normal si de cada sucesión $(f_n)_n$ en $\mathbb{F}$ puede extraerse una subsucesión $(f_{n_k})_k$ que converge localmente uniformemente hacia una función límite.

Por el Teorema de Weiesrtrass, la función límite es analítica, sin embargo, esta función no tiene por qué pertenecer a la familia.

Teorema 15.2.16. *(Montel) Sea $\mathbb{F}$ una familia de funciones analíticas en las condiciones anteriores. Si existen tres valores distintos a, b y c en $\hat{\mathbb{C}}$ que no son tomados por ninguna de las funciones de la familia, entonces $\mathbb{F}$ es normal.*

Cuando consideramos funciones con valores en $\mathbb{C}$, la definición de familia normal debe ser modificada como sigue.

Definición 15.2.17. *(Familias normales valoradas en $\mathbb{C}$) Sean Ω una región de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{F}$ una familia de funciones analíticas definidas de Ω en $\mathbb{C}$ (Ω puede ser igual a $\hat{\mathbb{C}}$). Diremos que la familia es normal si de cada sucesión $(f_n)_n$ en $\mathbb{F}$ puede extraerse una subsucesión $(f_{n_k})_k$ que:*
a) converge localmente uniformemente hacia una función límite
ó bien
b) diverge localmente uniformemente hacia ∞.

Ejemplo 15.2.18. Sea $f_n(z) = z + n$ para $z \in D$. $(f_n(z))_n$ diverge uniformemente hacia ∞: para $z \in D$, tenemos

$$|f_n(z)| \geq n - |z| \geq n - 1.$$

Vemos que $(f_n(z))_n$ es normal tanto considerada como una familia con valores en $\mathbb{C}$ como si consideramos que toman sus valores en $\hat{\mathbb{C}}$.

El criterio de normalidad de Montel para familias valoradas en $\mathbb{C}$ adopta la forma siguiente.

Teorema 15.2.19. *(Montel) Sea $\mathbb{F}$ una familia de funciones analíticas valoradas en $\mathbb{C}$. Si existen dos valores distintos a y b en $\mathbb{C}$ que no son tomados por ninguna de las funciones de la familia, entonces $\mathbb{F}$ es normal.*

Teorema 15.2.20. *(Criterio de Marty) Una familia* $\mathbb{F}$ *de funciones analíticas en* Ω *es normal si y sólo si para cada conjunto compacto* $K \subset \Omega$ *existe una constante* $M > 0$ *tal que*

$$|f'(z)| \leq M(1 + |f(z)|^2),$$

para todo $z \in K$ *y* $f \in \mathbb{F}$.

Teorema 15.2.21. *(Riemann) Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *una región simplemente conexa que no sea todo el plano y* $z_0 \in \Omega$*, existe una función bianalítica única* $f : \Omega \to \mathbb{D}$ *definida en* Ω*, normalizada por las condiciones* $f(z_0) = 0$ *y* $f'(z_0) > 0$.