

# Puntos Fijos Neutrales

C. Piñeiro

Departamento de Ciencias Integradas  
Universidad de Huelva

# Índice

- 1 Direcciones atractoras y repulsoras
- 2 El Teorema de la Flor
- 3 Puntos fijos indiferentes racionales
- 4 Puntos fijos irracionales

# Índice

- 1 Direcciones atractoras y repulsoras
- 2 El Teorema de la Flor
- 3 Puntos fijos indiferentes racionales
- 4 Puntos fijos irracionales

Nuestro objetivo es estudiar la dinámica de una aplicación compleja  $f(z)$  en el entorno de un punto  $m$ -periódico neutral o indiferente  $z^*$  ( $|(f^m)'(z^*)| = 1$ ).

Nuestro objetivo es estudiar la dinámica de una aplicación compleja  $f(z)$  en el entorno de un punto  $m$ -periódico neutral o indiferente  $z^*$  ( $|(f^m)'(z^*)| = 1$ ).

Cuando  $(f^m)'(z^*) = e^{2\pi mi/n}$ , siendo  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $z^*$  se dirá que es un **punto indiferente racional**.

Nuestro objetivo es estudiar la dinámica de una aplicación compleja  $f(z)$  en el entorno de un punto  $m$ -periódico neutral o indiferente  $z^*$  ( $|(f^m)'(z^*)| = 1$ ).

Cuando  $(f^m)'(z^*) = e^{2\pi mi/n}$ , siendo  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $z^*$  se dirá que es un **punto indiferente racional**.

Si  $(f^m)'(z^*) = e^{2\pi\theta i}$  con  $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ,  $z^*$  recibe el nombre de punto **indiferente irracional**.

Nuestro objetivo es estudiar la dinámica de una aplicación compleja  $f(z)$  en el entorno de un punto  $m$ -periódico neutral o indiferente  $z^*$  ( $|(f^m)'(z^*)| = 1$ ).

Cuando  $(f^m)'(z^*) = e^{2\pi mi/n}$ , siendo  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $z^*$  se dirá que es un **punto indiferente racional**.

Si  $(f^m)'(z^*) = e^{2\pi\theta i}$  con  $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ,  $z^*$  recibe el nombre de punto **indiferente irracional**.

Iniciamos el capítulo considerando el caso más simple que se produce cuando  $z^*$  es un punto fijo de  $f$  con  $f'(z^*) = 1$  (**punto fijo parabólico**).

Para simplificar, supondremos que el desarrollo en serie de Taylor de  $f$  tiene la forma

$$f(z) = z + az^{n+1} + \text{términos de mayor grado } (a \neq 0), \quad (1)$$

Para simplificar, supondremos que el desarrollo en serie de Taylor de  $f$  tiene la forma

$$f(z) = z + az^{n+1} + \text{términos de mayor grado} \quad (a \neq 0), \quad (1)$$

Sea  $u \in \mathbb{C}$  unitario. Diremos que  $u$  es una **dirección atractora** en el origen para  $f$  si  $au^n$  es real negativo.

Para simplificar, supondremos que el desarrollo en serie de Taylor de  $f$  tiene la forma

$$f(z) = z + az^{n+1} + \text{términos de mayor grado} \quad (a \neq 0), \quad (1)$$

Sea  $u \in \mathbb{C}$  unitario. Diremos que  $u$  es una **dirección atractora** en el origen para  $f$  si  $au^n$  es real negativo.

En cambio, si  $au^n$  es real positivo, se dirá que  $u$  es una **dirección repulsora** para  $f$  en el origen.

Sea  $u$  una dirección atractora para  $f$  y  $au^n = -\alpha$  con  $\alpha > 0$ . Por (1), podemos escoger  $0 < r$  suficientemente pequeño como para que una buena aproximación de  $f(ru) - ru$  sea  $a(ru)^{n+1}$ . Luego

$$f(ru) \approx ru + a(ru)^{n+1} = ru + r^{n+1}u(au^n) = (r - \alpha r^{n+1})u = su.$$

Sea  $u$  una dirección atractora para  $f$  y  $au^n = -\alpha$  con  $\alpha > 0$ . Por (1), podemos escoger  $0 < r$  suficientemente pequeño como para que una buena aproximación de  $f(ru) - ru$  sea  $a(ru)^{n+1}$ . Luego

$$f(ru) \approx ru + a(ru)^{n+1} = ru + r^{n+1}u(au^n) = (r - \alpha r^{n+1})u = su.$$

Entonces  $\alpha r^{n+1} < r$ , si se toma  $r < \alpha^{-n}$ . Para tales  $r$  se tiene  $0 < s < r$ , lo que muestra que la imagen por  $f$  de  $z = ru$ ,  $f(z) \approx su$ , está prácticamente en la "misma dirección" que  $z = ru$  y más cerca del origen.

Sea  $u$  una dirección atractora para  $f$  y  $au^n = -\alpha$  con  $\alpha > 0$ . Por (1), podemos escoger  $0 < r$  suficientemente pequeño como para que una buena aproximación de  $f(ru) - ru$  sea  $a(ru)^{n+1}$ . Luego

$$f(ru) \approx ru + a(ru)^{n+1} = ru + r^{n+1}u(au^n) = (r - \alpha r^{n+1})u = su.$$

Entonces  $\alpha r^{n+1} < r$ , si se toma  $r < \alpha^{-n}$ . Para tales  $r$  se tiene  $0 < s < r$ , lo que muestra que la imagen por  $f$  de  $z = ru$ ,  $f(z) \approx su$ , está prácticamente en la "misma dirección" que  $z = ru$  y más cerca del origen.

Esta es la razón de que se denomine a  $u$  dirección atractora.

Veamos que hay  $n$  direcciones atractoras.

Sea  $u \in \mathbb{C}$  (unitario) tal que  $au^n$  es real y negativo. Entonces, como  $u^n$  tiene módulo 1,  $|au^n| = |a|$ . Por ello, se tiene la igualdad  $au^n = -|a|$ . Por tanto,  $u$  tiene la forma

$$u = \sqrt[n]{\frac{-|a|}{a}} = \sqrt[n]{\frac{-|a|\bar{a}}{a \cdot \bar{a}}} = \sqrt[n]{\frac{-\bar{a}}{|a|}}.$$

Luego, si  $\alpha$  denota un argumento de  $a$ ,  $u$  se expresa en forma polar como sigue

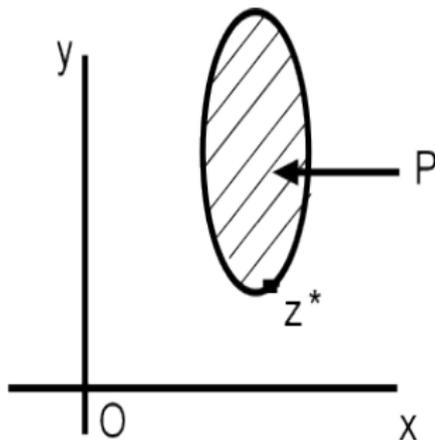
$$u = 1^{\frac{\pi - \alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k}.$$

Así pues, hay  $n$  direcciones atractoras separadas por  $2\pi/n$ , que se obtienen en la expresión anterior haciendo  $k = 0, 1, \dots, n - 1$  (nótese que  $\arg(-\bar{a}) = \pi - \arg(a)$ ).  
Con las direcciones repulsoras ocurre exactamente lo mismo.  
 $u$  es una dirección repulsora si y sólo si se verifica

$$u = \sqrt[n]{\frac{\bar{a}}{|a|}}$$

y hay exactamente  $n$  de tales direcciones que se expresan en forma polar por  $u = 1 \frac{-\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k$  y se obtienen en la expresión anterior haciendo  $k = 0, 1, \dots, n - 1$  (ahora hemos usado que  $\arg(\bar{a}) = 2\pi - \arg(a)$ ).

En definitiva, las direcciones atractoras dividen el plano en  $n$  regiones angulares de amplitud  $2\pi/n$ , e igual ocurre con las repulsoras (unas están intercaladas a las otras).



Sea  $f$  una función con un punto fijo neutral  $z^*$ . Una región simplemente conexa  $P \subset \mathbb{C}$  diremos que es un **pétalo atractor** para el punto fijo  $z^*$  si se cumplen las siguientes condiciones:

- 1)  $z^* \in Fr(P)$ , 2)  $f(P) \subset P$  y 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z_0) = z^*$  para cada  $z_0 \in P$ .

Sea  $f(z) = z + z^5$ . En este caso,  $a = 1$  y  $n = 4$ . Entonces las direcciones atractoras son las raíces cuartas de  $-1$ :

$$u_k = \cos((\pi/4) + (2\pi/4)k) + i \operatorname{sen}((\pi/4) + (2\pi/4)k) \text{ para } k = 0, 1, \dots, 3.$$

Mientras que las direcciones repulsoras son las raíces cuartas de  $1$  y vienen dadas por  $v_k = \pm 1, \pm i$ .

Sea  $f(z) = z + z^5$ . En este caso,  $a = 1$  y  $n = 4$ . Entonces las direcciones atractoras son las raíces cuartas de  $-1$ :

$$u_k = \cos((\pi/4) + (2\pi/4)k) + i \operatorname{sen}((\pi/4) + (2\pi/4)k) \text{ para } k = 0, 1, \dots, 3.$$

Mientras que las direcciones repulsoras son las raíces cuartas de  $1$  y vienen dadas por  $v_k = \pm 1, \pm i$ .

Por tanto  $f$  posee 4 pétalos atractores, cada uno situado en torno a la semirrecta bisectriz de un cuadrante.

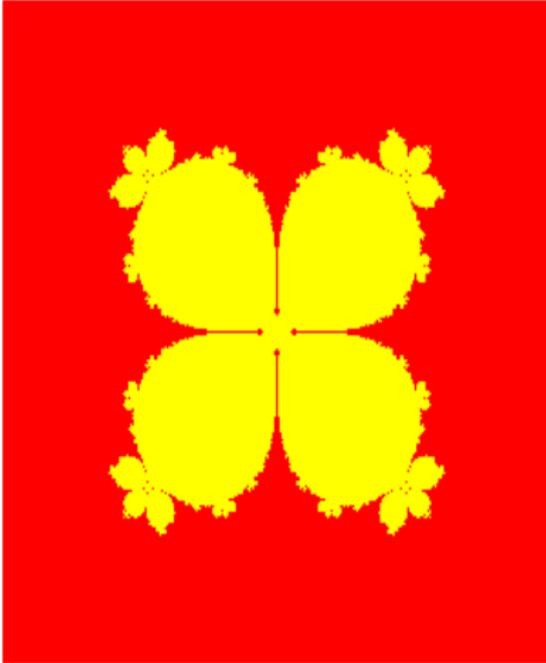
Sea  $f(z) = z + z^5$ . En este caso,  $a = 1$  y  $n = 4$ . Entonces las direcciones atractoras son las raíces cuartas de  $-1$ :

$$u_k = \cos((\pi/4) + (2\pi/4)k) + i \operatorname{sen}((\pi/4) + (2\pi/4)k) \text{ para } k = 0, 1, \dots, 3.$$

Mientras que las direcciones repulsoras son las raíces cuartas de  $1$  y vienen dadas por  $v_k = \pm 1, \pm i$ .

Por tanto  $f$  posee 4 pétalos atractores, cada uno situado en torno a la semirrecta bisectriz de un cuadrante.

En la figura siguiente mostramos los 4 pétalos atractores en torno al punto fijo  $z^* = 0$  de la función  $f(z) = z + z^5$ .



# Índice

- 1 Direcciones atractoras y repulsoras
- 2 El Teorema de la Flor**
- 3 Puntos fijos indiferentes racionales
- 4 Puntos fijos irracionales

## El teorema de la flor de Leau-Fatou

En las condiciones anteriores, se verifican las siguientes afirmaciones:

- (a) Existen  $n$  pétalos atractores  $U_i$  y  $n$  pétalos repulsores  $U'_i$  que se alternan de modo que cada  $U_i$  sólo intersecta a dos  $U'_i$  consecutivos. Los atractores son disjuntos dos a dos y lo mismo ocurre con los repulsores.
- (b) La unión de los  $2n$  pétalos, junto con el origen, es un entorno  $N_0$  del origen.

**Prueba** (1) Consideramos la región angular limitada por dos direcciones repulsoras consecutivas

$$-\frac{\arg(a)}{n} < \arg(z) < -\frac{\arg(a)}{n} + \frac{2\pi}{n}, \quad (2)$$

y denotamos por  $u$  la dirección atractora comprendida entre ambas:  $u = \exp(i(-\frac{\arg(a)}{n} + \frac{\pi}{n}))$ .

Vamos a usar la transformación  $T(z) = b/z^n$ , siendo  $b = -1/na$ . Su inversa es  $T^{-1}(w) = \sqrt[n]{b/w}$ . Esta función es multiforme y para evitar este problema vamos a mostrar que la región angular (2) se transforma por  $T$  en la región del  $w$ -plano dada por

$$-\pi < \arg(w) < \pi.$$

En efecto, si  $|\theta| < \pi/n$ , entonces  $z = re^{\theta i} u$  pertenece a dicha región y  $w = b/z^n = e^{-n\theta i} / nr^n |a|$  (hemos usado que  $au^n = -|a|$ ). Luego  $\arg(w) = -n\theta$  y se sigue que  $\arg(w) \in (-\pi, \pi)$ . Esto permite considerar el argumento principal y disponer de una inversa  $T^{-1}(w)$  uniforme:

$$T^{-1}(w) = \sqrt[n]{\left| \frac{b}{w} \right|} e^{i(\pi - \arg(a) - \arg_p(w))/n}, \quad (3)$$

donde  $\log_p(w)$  denota el logaritmo principal de  $w$ .  
Pasamos ahora a tratar de determinar la forma de la función  $g(w)$  conjugada de  $f(z)$  por medio de  $T(z) = b/z^n$ :

$f(z) = z + az^{n+1} + \text{términos de mayor grado} = z(1 + az^n + o(z^n))$ ,

siendo el desarrollo anterior válido para  $|z| < s$  y donde  $o(z^n)$  verifica

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{o(z^n)}{z^n} = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} g(w) &= T \circ f \circ T^{-1}(w) = \frac{b}{f(z)^n} = \frac{b}{z^n} (1 + az^n + o(z^n))^{-n} = \\ &= w(1 + az^n + o(z^n))^{-n}. \end{aligned}$$

Para estimar  $(1 + az^n + o(z^n))^{-n}$  usaremos el desarrollo binomial

$$(1 + \lambda)^\alpha = 1 + \alpha\lambda + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}\lambda^2 + \dots,$$

válido para  $|\lambda| < 1$ . Aplicado a nuestro caso:

$$(1 + az^n + o(z^n))^{-n} = 1 - n(az^n + o(z^n)) + o(\lambda),$$

donde  $\lambda = az^n + o(z^n)$ .

Pero nótese que  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{o(\lambda)}{z^n} = 0$ . Por tanto, se verifica

$$(1 + az^n + o(z^n))^{-n} = 1 - naz^n + o(z^n),$$

válido para  $|z| < r^*$ .

Finalmente, teniendo en cuenta que  $b = -1/na$ ,  $z^n = b/w$ , obtenemos

$$g(w) = w\left(1 + \frac{1}{w} + o\left(\frac{b}{w}\right)\right) = w + 1 + w \cdot o\left(\frac{b}{w}\right) = w + 1 + r(w),$$

siendo  $\lim_{w \rightarrow \infty} r(w) = 0$ .

Entonces, dado  $c \in (0, 1)$  existe  $R_c > 0$  de modo que

$$|g(w) - w - 1| < c \text{ para } |w| > R_c. \quad (4)$$

Luego, para  $\operatorname{Re}(w) > R_c$ , se tiene

$$\operatorname{Re}(g(w)) = 1 + \operatorname{Re}(w) + \operatorname{Re}(r(w)) > \operatorname{Re}(w) + 1 - c \text{ para } |w| > R_c.$$

Se puede repetir el proceso  $k$  veces y se obtiene

$$\operatorname{Re}(g(w)) > \operatorname{Re}(w) + k(1 - c)$$

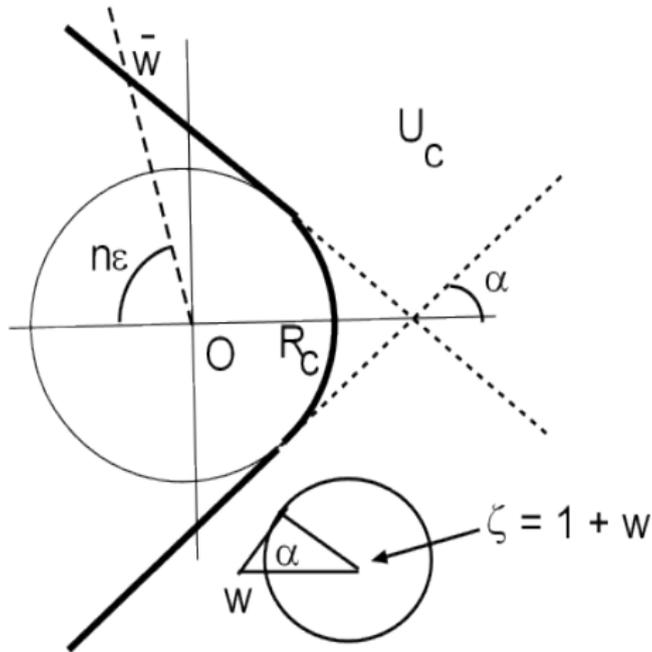
y, por tanto, se verifica  $\lim_{k \rightarrow \infty} g^k(w) = \infty$ .

Lo anterior se verifica para todo  $w_0$  en el semiplano  $\operatorname{Re}(w) > R_c$ , para todo  $c \in (0, 1)$ .

Sin embargo, vamos a ver que también es cierto en una región mayor.

Consideramos las dos semirrectas tangentes a la circunferencia de centro el origen y radio  $R_c$  con pendiente igual a  $\pm c/\sqrt{1 - c^2}$ .

$U_c$  es la región situada a la derecha limitada por dichas semirrectas y un arco de la citada circunferencia, como se indica en la siguiente figura.



Si  $w \in U_c$  y  $\zeta = 1 + w$ , entonces  $g(w)$  pertenece al disco  $(\zeta, c)$  y  $c$  es precisamente el radio de la circunferencia con centro en  $\zeta$  que se indica en la figura. Por tanto,  $g(U_c) \subset U_c$ .

También es obvio que, si  $w_0 \in U_c$ , su órbita acaba entrando en  $\operatorname{Re}(w) > R_c$ , por lo que  $\lim_{k \rightarrow \infty} g^k(w) = \infty$ .

En definitiva, hemos probado que  $T^{-1}(U_c)$  es un pétalo atractor para  $f$  en el origen. Pero para la prueba de (b) debemos ser más precisos.

Finalmente, probaremos que, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  de modo que el sector circular  $\Delta$  dado por

$$\Delta = \{z = re^{i\theta} u : 0 < r < \delta, |\theta| < \pi/n - \varepsilon\}$$

está contenido en un pétalo atractor para  $f$ . Este hecho es fundamental para la prueba de (b). Nótese que, para  $z \in \Delta$ , se tiene  $\arg(w) \in (-\pi + n\varepsilon, \pi - n\varepsilon)$ , donde  $w = T(z)$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , ponemos  $c = \text{sen}\varepsilon$  y consideramos la recta que pasa por el origen con pendiente  $-\text{tg}(n\varepsilon)$ , que corta en el punto  $\bar{w}$  a la tangente superior.

Un cálculo elemental prueba que  $|\bar{w}| = R_c / \text{sen}(n-1)\varepsilon$ . Por ello, basta escoger  $\delta = (|b| \text{sen}(n-1)\varepsilon / R_c)^{1/n}$ . Con esta elección de  $\delta$  es fácil probar que  $T$  transforma el sector  $\Delta$  en un subconjunto de  $U_c$ .

(2) *Construcción de un pétalo repulsor.* Consideramos la región angular limitada por dos direcciones atractoras consecutivas

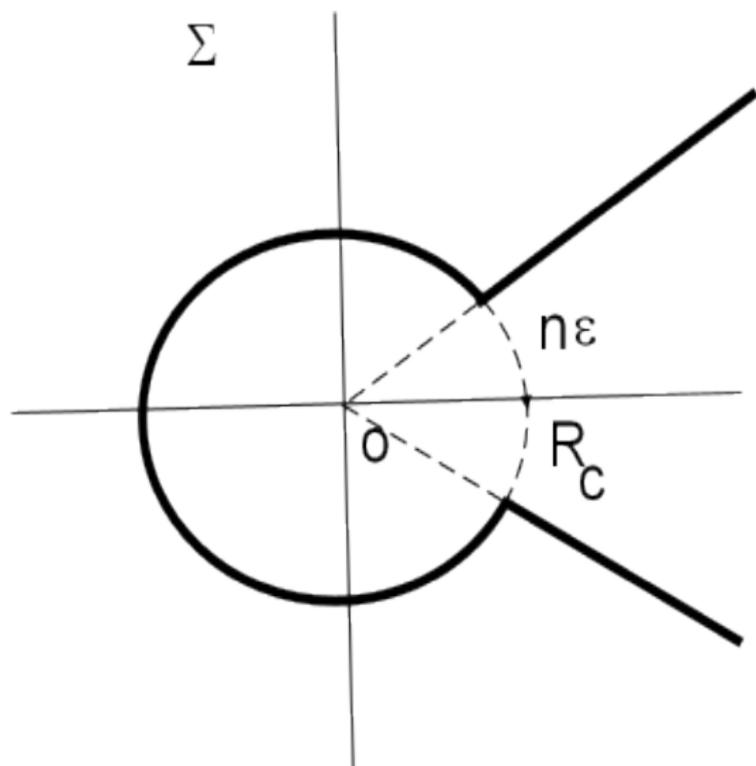
$$\frac{-\arg(a) + \pi}{n} < \arg(z) < \frac{-\arg(a)\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} \quad (5)$$

y denotemos por  $v$  la dirección repulsora que encierra.  $T$  transforma esta región en el plano sin el semieje real positivo.

En efecto, si  $z = re^{\theta i} v$ , con  $r > 0$  y  $|\theta| < \pi/n$ , entonces  $w = T(z) = -e^{-n\theta i} / nr^n |a|$  (hemos usado la igualdad  $av^n = |a|$ ). Entonces  $\arg(w) = \pi - n\theta$ , lo que implica que  $0 < \arg(w) < 2\pi$ . Entonces la inversa de  $T$  viene dada por

$$z = T^{-1}(w) = \sqrt[n]{\left| \frac{b}{w} \right|} e^{i(-\arg(a) + 3\pi - \arg(w))/n},$$

para todo  $w$  no perteneciente al semieje real positivo y con  $\arg(w) \in (0, 2\pi)$ .



Dado  $\varepsilon > 0$ , ponemos  $\Omega = \{z = re^{i\theta}v : r > 0, |\theta| < (\pi/n) - \varepsilon\}$ .  
 $T$  aplica esta región en la región angular  
 $n\varepsilon < \arg(w) < 2\pi - n\varepsilon$ . Escogido  $c \in (0, 1)$ , denotamos por  $\Sigma$   
la parte de esta región angular que queda fuera del disco  
 $|w| \leq R_c$ . Por lo visto en (1), para  $w$  en esta región se tiene

$$\operatorname{Re}(g^k(w)) \geq \operatorname{Re}(w) + k(1 - c).$$

Luego es obvio que para cada  $w \in \Sigma$ , la órbita de  $w$  acaba saliendo en algún momento de la región  $\Sigma$ . Por ello, la transformada de esta región mediante  $T^{-1}$  es un pétalo repulsor para el origen.

El resultado siguiente se necesita para el estudio de los puntos indiferentes racionales que realizamos en el apartado siguiente.

### Teorema

En las condiciones anteriores, sea  $u$  una de las  $n$  direcciones atractoras de  $f$  en el origen. Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(z)}{|f^n(z)|} = u,$$

para cada  $z \in \Delta$ , siendo  $\Delta$  el sector

$$\{z = re^{i\theta} u : 0 < r < \delta, |\theta| < \pi/n - \varepsilon\}.$$

## Demostración

En la prueba del teorema anterior se obtuvo la igualdad

$$g(w) = w + 1 + r(w) \text{ siendo } \lim_{w \rightarrow \infty} r(w) = 0 \quad (6)$$

y, dado  $\varepsilon > 0$ , se prueba la existencia de  $\delta > 0$  de forma que el sector  $\Delta$  se transforma mediante  $T$  en un conjunto contenido en la región  $U_c$ , atractora para  $g(w)$  en el infinito, siendo  $c = \text{sen}\varepsilon$ . Escogido  $w_0$  en dicha región, denotemos por  $(w_j)$  su órbita mediante  $g$ , que es divergente. Para cada  $k \in \mathbb{N}$  se tiene

$$\frac{w_k - w_0}{k} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (w_j - w_{j-1}).$$

Por (6), para cada diferencia  $w_j - w_{j-1}$  tenemos

$$w_j - w_{j-1} = g(w_{j-1}) - w_{j-1} = 1 + r(w_{j-1}),$$

de donde se sigue

$$\frac{w_k - w_0}{k} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (1 + r(w_{j-1})) = 1 + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k r(w_{j-1}).$$

Como  $(r(w_{j-1}))$  converge a 0, también lo hace la sucesión de sus medias aritméticas. Por tanto, la igualdad anterior implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_k - w_0}{k} = 1.$$

Pero  $w_0/k \rightarrow 0$ , luego hemos obtenido que  $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k/k = 1$ .  
Veamos en qué se traduce esto en relación con las iteraciones en el  $z$ -plano. Escogemos  $z_0 \in \Delta$ , entonces  $w_0 = T(z_0) \in U_c$ . Sabemos que  $w_k/k \rightarrow 1$  y vamos a mostrar que  $z_k/|z_k| \rightarrow u$ . En primer lugar, probamos que  $z_k/k^{-(1/n)} \rightarrow \sqrt[n]{|b|}$ . En efecto

$$\frac{z_k}{k^{-(1/n)}} = \frac{T^{-1}(w_k)}{k^{-(1/n)}} = \sqrt[n]{\left| \frac{kb}{w_k} \right|} e^{i(\pi - \arg(a) - \arg_p(w_k))/n}.$$

Pero  $w_0/k \rightarrow 0$ , luego hemos obtenido que  $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k/k = 1$ . Veamos en qué se traduce esto en relación con las iteraciones en el  $z$ -plano. Escogemos  $z_0 \in \Delta$ , entonces  $w_0 = T(z_0) \in U_c$ . Sabemos que  $w_k/k \rightarrow 1$  y vamos a mostrar que  $z_k/|z_k| \rightarrow u$ . En primer lugar, probamos que  $z_k/k^{-(1/n)} \rightarrow \sqrt[n]{|b|}$ . En efecto

$$\frac{z_k}{k^{-(1/n)}} = \frac{T^{-1}(w_k)}{k^{-(1/n)}} = \sqrt[n]{\left| \frac{kb}{w_k} \right|} e^{i(\pi - \arg(a) - \arg_p(w_k))/n}.$$

Nótese que las igualdades  $T \circ f^k = g^k \circ T$ ,  $w_k = g^k(w_0)$  y  $z_k = f^k(z_0)$  implican  $w_k = T(z_k)$ .

La igualdad  $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k/k = 1$  implica que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \log(k/|w_k|) = 0$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} \arg_p(w_k) = 0$ , por lo que de la expresión anterior deducimos que  $z_k/k^{-(1/n)} \rightarrow \sqrt[n]{|b|} e^{i(\pi - \arg(a))/n}$ .

Finalmente, podemos calcular el límite de  $(z_k/|z_k|)$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k}{|z_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{(1/n)} z_k}{|k^{(1/n)} z_k|} = \frac{\sqrt[n]{|b|} e^{i(\pi - \arg(a))/n}}{\sqrt[n]{|b|}} = e^{i(\pi - \arg(a))/n} = u.$$

## Definición

Sea  $u$  una dirección atractora para  $f$  y  $z_0, z_1, \dots, z_n, \dots$  una órbita con  $z_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , diremos que converge a 0 en la dirección  $u$  si verifica

$$z_n \rightarrow 0 \text{ y } \frac{z_n}{|z_n|} \rightarrow u.$$

# Índice

- 1 Direcciones atractoras y repulsoras
- 2 El Teorema de la Flor
- 3 Puntos fijos indiferentes racionales**
- 4 Puntos fijos irracionales

Sea ahora  $z^*$  un punto fijo neutral con multiplicador  $\lambda$  igual a una raíz de la unidad,

## Ejemplos

(1) Sea  $f(z) = \lambda z + az^2$ , siendo  $a \neq 0$  y  $\lambda^3 = 1$  pero  $\lambda \neq 1$ . Es obvio que  $z^* = 0$  es un punto fijo indiferente racional. La idea consiste en comprobar que la tercera iteración tiene la forma  $f^3(z) = z + Az^{3\ell+1} + \text{términos de mayor grado}$ . Empezamos obteniendo  $f^2(z)$ :

$$\begin{aligned} f^2(z) &= \lambda(\lambda z + az^2) + a(\lambda z + az^2)^2 = \\ &= \lambda^2 z + \lambda(1 + \lambda)az^2 + 2a^2\lambda z^3 + a^3 z^4. \end{aligned}$$

## Finalmente

$$\begin{aligned}f^3(z) &= \lambda f^2(z) + a f^2(z)^2 = \\&= \lambda^3 z + z^2[\lambda^2(1 + \lambda)a + a\lambda^4] + z^3[2a^2\lambda^2 + 2a^2\lambda^3(1 + \lambda)] + \\&\quad + z^4[a^3\lambda + a^3\lambda^2(1 + \lambda)^2 + 4a^3\lambda^3] + \dots.\end{aligned}$$

Como  $\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(1 + \lambda + \lambda^2)$ , se sigue que  $1 + \lambda + \lambda^2 = 0$ .  
Usando esto junto con la igualdad  $\lambda^3 = 1$ , se obtiene

$$f^3(z) = z + a^3(\lambda + 5)z^4 + \dots$$

Aplicando el Teorema de la flor a la iteración  $f^3$ , deducimos que esta función posee 3 pétalos atractores y otros 3 repulsores en torno al origen dispuestos alternativamente. Estos pétalos para  $f^3$  también lo son para  $f$ . En efecto, si  $P$  es un pétalo atractor para  $f^3$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f^3)^n(z_0) = 0 \text{ para todo } z_0 \in P.$$

Como  $f(0) = 0$ , se sigue de la continuidad de  $f$  que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f)^{3n+1}(z_0) = 0 \text{ para todo } z_0 \in P$$

y repitiendo de nuevo el razonamiento

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f)^{3n+2}(z_0) = 0 \text{ para todo } z_0 \in P.$$

En definitiva, se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z_0) = 0$ , lo que prueba que  $P$  es un pétalo atractor para  $f$ .

En definitiva, se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z_0) = 0$ , lo que prueba que  $P$  es un pétalo atractor para  $f$ .

## Ejemplo 2

Sea  $f(z) = -z + z^4$ . Como  $(-1)^2 = 1$ , en este caso basta obtener la forma de  $f^2$

$$\begin{aligned} f^2(z) &= f(-z + z^4) = -(-z + z^4) + (-z + z^4)^4 = \\ &= z + 4(-z)^3 z^4 + \dots = z - 4z^7 \dots \end{aligned}$$

En este caso  $f^2$  posee 6 pétalos atractores.

En general, si  $f(z) = \lambda z + az^{p+1} + \dots$  y  $\lambda = \exp(2\pi pi/q)$  con  $p$  y  $q$  primos entre sí ( $\lambda$  es una  $q$ -raíz de la unidad), el número  $n$  de pétalos atractoras de  $f^q$  es un múltiplo de  $q$ . En efecto, las  $n$  direcciones atractoras de  $f^q$  están separadas por un ángulo de  $2\pi/n$  radianes; por tanto, tienen la forma

$$v_0 = e^{i\theta}, v_1 = e^{i(\theta+2\pi/n)}, \dots, v_{n-1} = e^{i(\theta+2\pi(n-1)/n)}.$$

Escogemos  $z_0$  de forma que su órbita mediante  $f^q$  tienda a 0 en la dirección de  $v_0$ ; es decir, se verifica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_{kq} = 0 \text{ y } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_{kq}}{|z_{kq}|} = v_0.$$

Si denotamos  $f^m(z_0)$  por  $z_m$ , vamos a comprobar que la órbita de  $z_1$  por  $f^q$ ,  $z_1, z_{q+1}, z_{2q+1}, \dots$ , tiende a 0 en la dirección  $\lambda v_0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_{kq+1}}{|z_{kq+1}|} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(z_{kq})}{|f(z_{kq})|} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{f(z_{kq}) - f(0)}{z_{kq} - 0} \right) z_{kq}}{\left| \frac{f(z_{kq}) - f(0)}{z_{kq} - 0} \right| |z_{kq}|} = \frac{f'(0)}{|f'(0)|} v_0 = \lambda v_0. \end{aligned}$$

Entonces  $\lambda_{v_0}$  debe coincidir con alguno de los  $v_j$  ( $j \neq 0$ ).

Luego:

$$e^{2\pi pi/q} \cdot e^{\theta i} = e^{(\theta+(2\pi/n)j)i},$$

de donde se sigue que  $(2\pi p)/q - (2\pi j)/n = 2k\pi$ ; es decir,  $p/q - j/n = k$ . Como  $p/q$  y  $j/n$  son números positivos menores que 1, necesariamente debe ser  $k = 0$ , por lo que  $pn = qj$ . Esto nos dice que  $q$  divide al producto  $np$ , pero es primo con  $p$ , por tanto,  $q$  divide a  $n$ .

# Índice

- 1 Direcciones atractoras y repulsoras
- 2 El Teorema de la Flor
- 3 Puntos fijos indiferentes racionales
- 4 Puntos fijos irracionales**

En este apartado abordamos parcialmente el estudio del comportamiento local en un punto fijo neutral irracional. Consideramos una función

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots,$$

definida para  $|z| < r$ , siendo  $|\lambda| = 1$ , pero  $\lambda$  no es una raíz de la unidad. Entonces  $\lambda$  puede escribirse de la forma  $\lambda = e^{2\pi i\theta}$  con  $\theta \in (0, 1)$  real e irracional (usualmente,  $\theta$  recibe el nombre de ángulo de rotación en el punto fijo  $z_0$ ).

El problema central consiste en determinar si  $f(z)$  puede ser linalizada, es decir, si es conjugada en un entorno  $U$  del origen de  $g(w) = \lambda w$ .

Si esto ocurre, entonces en  $U$  no puede haber puntos periódicos de  $f(z)$ , diferentes del punto fijo  $z_0$ . Por ello,  $U$  estaría incluido en  $\mathbb{F}(f)$ .

**Breve historia de este problema.** En 1912, E. Kasner planteó la conjetura de que la linealización siempre era posible. Pero 5 años más tarde, G. A. Pfeiffer probó que Kasner estaba equivocado, pues para ciertas funciones mostró que la linealización no era posible. En 1919, Julia creyó que había probado que tal linealización nunca era posible, pero su prueba no era correcta. En 1927, H. Cremer probó que para una elección genérica de  $\lambda$  en el disco unidad no había linealización posible mostrando que en un entorno del punto fijo neutral hay infinitos puntos periódicos de  $f$ .

## Definición

Diremos que un ángulo irracional  $\theta$  verifica la condición de Cremer de orden  $d$  si el complejo asociado  $\lambda = e^{2\pi\theta i}$  cumple la condición

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{\log \log \left( |\lambda^q - 1| \right)^{-1}}{q} > \log d.$$

La condición anterior significa que la diferencia  $|\lambda^q - 1|$  tiende a 0 de una forma extremadamente rápida cuando  $q \rightarrow \infty$ .

## Teorema de Cremer

Sea  $\theta$  un ángulo que verifica la condición de Cremer de orden  $d \geq 2$  y  $f(z)$  cualquier función racional de grado  $d$  que tiene un punto fijo irracional  $z_0$ . Entonces en un entorno de  $z_0$   $f$  posee una cantidad infinita de órbitas periódicas.

## Teorema de Cremer

Sea  $\theta$  un ángulo que verifica la condición de Cremer de orden  $d \geq 2$  y  $f(z)$  cualquier función racional de grado  $d$  que tiene un punto fijo irracional  $z_0$ . Entonces en un entorno de  $z_0$   $f$  posee una cantidad infinita de órbitas periódicas.

## Prueba

Consideramos en primer lugar el caso de un polinomio  $f(z) = z^d + \dots + \lambda z$ . Es fácil comprobar que  $f^q(z) = z^{d^q} + \dots + \lambda^q z$ . Por tanto, los puntos fijos de  $f^q$  son las raíces de la ecuación  $z^{d^q} + \dots + (\lambda^q - 1)z = 0$ . Luego tiene  $d^q - 1$  puntos fijos distintos del origen y su producto es igual a  $\pm(\lambda^q - 1)$ .

Esto obliga a que al menos uno  $z_q$  cumpla

$$0 < |z_q| \leq |\lambda^q - 1|^{1/(d^q-1)} \leq |\lambda^q - 1|^{1/d^q}.$$

Por otra parte, por la condición de Cremer, fijado  $\epsilon > 0$ , existe una cantidad infinita de  $q \in \mathbb{N}$  de modo que

$$q^{-1} \log \log \left( \frac{1}{|\lambda^q - 1|} \right) > \log d + \epsilon,$$

lo que implica

$$\log \left( \frac{\log |\lambda^q - 1|^{-1}}{d^q} \right) > \epsilon q.$$

Un sencillo cálculo permite obtener

$$0 < |z_q| \leq |\lambda^q - 1|^{1/d^q} \leq \exp(-e^{\epsilon q}) \quad (7)$$

Si ponemos  $f(z)$  en la forma  $f(z) = z(z^{d-1} + \dots + \lambda) = zf_0(z)$ , por la continuidad de  $f_0(z)$  en el origen, existe  $\delta > 0$  tal que

$$|z| < \delta \Rightarrow |f(z)| < e^\epsilon |z|. \quad (8)$$

Entonces, tomando  $|z| < \delta e^{-q\epsilon}$ , se deduce a partir de (8)

$$|f^k(z)| \leq \delta e^{-(q-k)\epsilon} < \delta \quad (9)$$

para  $k = 1, 2, \dots, q$ . Por (7) existe un punto fijo  $z_q$  de  $f^q$  verificando

$$0 < |z_q| \leq \exp(-e^{\epsilon q}) < \delta e^{-\epsilon q},$$

habiendo usado en el último paso que  $\lim_{q \rightarrow \infty} e^{\epsilon q} / e^{e^{\epsilon q}} = 0$ .  
Por ello, toda la órbita de  $z_q$  pertenece al disco  $D(0, \delta)$  y esto puede hacerse para infinitos valores de  $q$ .

b) Consideramos ahora el caso de una función racional  $f(z)$  de grado  $d$ .

(1) Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador,  $f(z)$  debe tener la forma

$$f(z) = \frac{a_d z^d + \dots + \lambda b_0 z}{b_p z^p + \dots + b_0},$$

para que  $f(0) = 0$  y  $f'(0) = \lambda$  (siendo  $p \leq d$  y  $a_d \neq 0 \neq b_0$ ).  
Entonces es obvio que existe  $z_1 \neq 0$  de modo que  $f(z_1) = 0$ .

(2) Si el grado del numerador es menor que el del denominador, entonces  $f(\infty) = 0$ .

Conjugando con  $w = h(z) = z/(z - z_1)$ , podemos conseguir que en el caso (1) también se tenga que la aplicación en consideración verifique  $f(0) = f(\infty) = 0$  ( $h \circ f \circ h^{-1}$  aplica  $\infty$  y 0 en 0). Suponemos, por tanto, que nuestra función racional verifica además que  $f(0) = f(\infty) = 0$ . Finalmente, con un cambio de escala puede conseguirse que  $f(z)$  adopte la forma

$$f(z) = \frac{\text{potencias de mayor grado} + \lambda z}{z^d + \dots + 1},$$

siendo el grado del numerador estrictamente menor que  $d$  ( $f(\infty) = 0$ ). Ahora un cálculo elemental pero tedioso permite obtener

$$f^q(z) = \frac{P_q(z)}{Q_q(z)} = \frac{\text{potencias de mayor grado} + \lambda^q z}{z^{d^q} + \dots + 1}.$$

Entonces los puntos fijos de  $f^q$  verifican

$$0 = zQ_q(z) - P_q(z) = z(z^{d^q} + \dots + (1 - \lambda^q))$$

y puede aplicarse el mismo proceso que en el caso polinómico.