Conjugación Local

C. Piñeiro

Departamento de Ciencias Integradas
Universidad de Huelva

Índice

Consideramos una función f con un punto fijo z^*. Para simplificar, supondremos que el punto fijo es el origen y, por tanto, f tiene un desarrollo de Taylor en el origen del tipo

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots ,$$

convergente para $|z| < r$.

Consideramos una función f con un punto fijo z^*. Para simplificar, supondremos que el punto fijo es el origen y, por tanto, f tiene un desarrollo de Taylor en el origen del tipo

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots ,$$

convergente para $|z| < r$.

El problema de la conjugación analítica en un entorno de un punto fijo consiste en determinar si existe ϕ (bianalítica) definida en un entorno U del origen de modo que

$$g(w) = \phi \circ f \circ \phi^{-1}(w), \;\; \text{siendo } g(w) = \lambda w, w \in \phi(U).$$

Consideramos una función f con un punto fijo z^*. Para simplificar, supondremos que el punto fijo es el origen y, por tanto, f tiene un desarrollo de Taylor en el origen del tipo

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots ,$$

convergente para $|z| < r$.

El problema de la conjugación analítica en un entorno de un punto fijo consiste en determinar si existe ϕ (bianalítica) definida en un entorno U del origen de modo que

$$g(w) = \phi \circ f \circ \phi^{-1}(w), \text{ siendo } g(w) = \lambda w, w \in \phi(U).$$

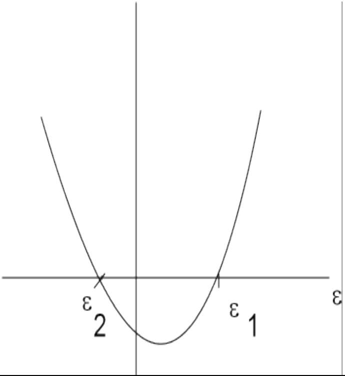
Si el punto fijo z^* es superatractor, entonces f es conjugada analíticamente de $g(z) = z^q$, siendo q el orden de multiplicidad de z^* como cero de $f(z) - z$.

Índice

Lema

Dado $a \in (0,1)$, existe $c \in (0,1)$ tal que $c^2 < a < c$.

Prueba: Veamos que puede escogerse $\epsilon > 0$ de modo que $a + \epsilon$ es el c deseado.



Tenemos que escoger ϵ de modo que $(a+\epsilon)^2 < a$ ó, equivalentemente, $g(\epsilon) = \epsilon^2 + 2a\epsilon + a^2 - a < 0$. Las raíces de $g(\epsilon) = 0$ son $\epsilon_1 = -a + \sqrt{a} > 0$ y $\epsilon_2 = -a - \sqrt{a} < 0$. En la figura vemos la gráfica de $g(\epsilon) = (\epsilon - \epsilon_1)(\epsilon - \epsilon_2)$. Para $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$ se tiene $g(\epsilon) < 0$. Sólo resta probar que $c = a + \epsilon < 1$: $a + \epsilon < a + \epsilon_1 = a + \sqrt{a} - a = \sqrt{a} < 1$.

Teorema(Koenigs)

Sea $f(z) = \lambda z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ convergente para $|z| < r$. Si $|\lambda| \neq 1, 0$, existen un entorno U de 0 y $\phi : U \to \mathbb{C}$ difeomorfismo analítico tal que $\phi \circ f \circ \phi^{-1}(w) = \lambda w$. Además, ϕ es única salvo por una constante multiplicativa.

Prueba:1) Prueba de la existencia para el caso $0 < |\lambda| < 1$. Aplicamos el lema con $a = |\lambda|$ y escogemos $c > 0$ de modo que $c^2 < |\lambda| < c < 1$. Como $|f'(0)| = |\lambda| < c < 1$, existe $\delta > 0$ de suerte que

$$|f(z)| \leq c|z| \, \text{para todo} \, z \in \overline{D}_\delta. \tag{1}$$

Por otra parte, $f(z) - \lambda z = \sum_{n \geq 2} a_n z^n = z^2 \left(\sum_{n \geq 2} a_n z^{n-2} \right)$. Por ello, se tiene

$$|f(z) - \lambda z| \leq k|z|^2 \ (z \in \overline{D}_\delta), \tag{2}$$

donde $k = \max\{|\sum_{n\geq 2} a_n z^{n-2}| : z \in \overline{D}_\delta\}$. A partir de (1), por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$, se obtiene

$$|f^n(z) - 0| \leq c^n|z| \leq c^n\delta < \delta \, (z \in \overline{D}_\delta), \tag{3}$$

Como $c \in (0,1)$, se sigue de (3) que $(f^n(z))_n \to 0$ uniformemente en $\overline{D}_\delta$. Veamos qué ocurre con la diferencia $|f^{n+1}(z) - \lambda f^n(z)|$:

$$|f^{n+1}(z) - \lambda f^n(z)| = |f(f^n(z)) - \lambda f^n(z)| \leq k|f^n(z)|^2,$$

habiendo aplicado en el último paso (2) a $w = f^n(z) \in \overline{D}_\delta$. De la desigualdad anterior, junto con (3) se obtiene

$$|f^{n+1}(z) - \lambda f^n(z)| \leq k|f^n(z)|^2 \leq kc^{2n}|z|^2 \, (z \in \overline{D}_\delta), \tag{4}$$

para todo $z \in \overline{D}_\delta$. Definimos $\phi_n(z) = f^n(z)/\lambda^n$ ($z \in \overline{D}_\delta$) y probamos que $(\phi_n(z))_n$ converge uniformemente hacia una función analítica en D_δ. En efecto, para $z \in \overline{D}_\delta$, se tiene

$$|\phi_{n+1}(z) - \phi_n(z)| = \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} |f^{n+1}(z) - \lambda f^n(z)| \leq \frac{k}{|\lambda|} \left(\frac{c^2}{|\lambda|}\right)^n |z|^2. \tag{5}$$

A partir de la relación anterior, con un argumento estándar se prueba que $(\phi_n(z))_n$ es uniformemente convergente en $\overline{D}_\delta$ hacia una función $\phi(z)$ analítica en D_δ. Veamos ahora que $\phi(z)$ verifica las condiciones indicadas:
(a) $\phi(f(z)) = \lambda \phi(z)$ para $z \in D_\delta$:

$$\phi(f(z)) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(f(z))}{\lambda^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{n+1}(z)}{\lambda^n} = \lambda \phi(z).$$

(b) Existe $M > 0$ tal que $|\phi(z) - z| < M|z|^2$ para $z \in \overline{D}_\delta$:

$$|\phi_n(z) - z| \leq |\phi_n(z) - \phi_{n-1}(z)| + \cdots + |\phi_1(z) - z| \leq$$

$$\sum_{i=2}^{n} |\phi_i(z) - \phi_{i-1}(z)| + \frac{1}{|\lambda|}|f(z) - \lambda z|.$$

De donde se sigue, usando (2) y (5), que

$$|\phi_n(z) - z| \leq |z|^2 \frac{k}{|\lambda|} \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{c^2}{|\lambda|}\right)^{i-1} + |z|^2 \frac{k}{|\lambda|} \leq M|z|^2,$$

para $z \in D_\delta$. Tomando límite cuando $n \to \infty$, resulta la desigualdad deseada.

(c) $\phi'(0) = 1$. En efecto:

$$\phi'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{\phi(z) - \phi(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{\phi(z)}{z}.$$

Pero por (b)

$$\left|\frac{\phi(z)}{z} - 1\right| \leq M|z| \ (0 < |z| < \delta),$$

lo que implica $\phi'(0) = 1$ (hemos usado que $\phi(0) = 0$, que puede deducirse a partir de (a)). Por (c) ϕ es, localmente, un difeomorfismo analítico.

2) Existencia en el caso $|\lambda| > 1$. La función inversa f^{-1}, que está definida en un entorno del origen, cumple todas las condiciones del caso anterior: el origen es un punto fijo y $|(f^{-1})'(0)| = 1/|\lambda| < 1$. Entonces existe un difeomorfismo analítico $\phi : U \to \mathbb{C}$ verificando: $\phi(f^{-1}(w)) = (1/\lambda)\phi(w)$, para todo $w \in U$. Luego $\lambda\phi(f^{-1}(w)) = \phi(w)$

y aplicando la igualdad a $w = f(z)$, resulta $\lambda\phi(z) = \phi(f(z))$.
3) Unicidad. Supongamos que existen ϕ y ψ verificando:

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1} = L = \psi \circ f \circ \psi^{-1},$$

siendo $L(w) = \lambda w$. Entonces $\psi \circ \phi^{-1}$ conmuta con L. En efecto: como $\phi^{-1} \circ L = f \circ \phi^{-1}$, concluimos

$$\psi \circ \phi^{-1} \circ L = \psi \circ f \circ \phi^{-1}. \tag{6}$$

Por otra parte, se verifica la relación $\psi \circ f = L \circ \psi$, que permite obtener a partir de (6)

$$\psi \circ \phi^{-1} \circ L = L \circ \psi \circ \phi^{-1}.$$

Como $L(w) = \lambda w$, de la última igualdad deducimos

$$\psi \circ \phi^{-1}(\lambda w) = \lambda \psi \circ \phi^{-1}(w), \tag{7}$$

para w en un entorno del origen. Al ser $\psi \circ \phi^{-1}(0) = 0$, podemos expresar $\psi \circ \phi^{-1}$ en la forma

$$\psi \circ \phi^{-1}(w) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n.$$

Finalmente, teniendo en cuenta (7), obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (\lambda w)^n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n,$$

para w en un entorno del origen. Igualando los coeficientes respectivos, resulta: $b_n \lambda^n = \lambda b_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si existe $n \geq 2$ tal que $b_n \neq 0$, entonces $\lambda^n = \lambda$, lo que es imposible por ser $|\lambda| \neq 0, 1$. Por tanto, deben ser nulos todos los b_n a partir de $n = 2$ y $\psi \circ \phi^{-1}(w) = b_1 w$, de donde se sigue que $\phi = \psi / b_1$.

Nota

Como la convergencia de $f^n(z)$ hacia el punto fijo z^* es uniforme localmente en $\Omega(z^*)$, $\phi(z)$ verificando $\phi(f(z)) = \lambda\phi(z)$ se puede definir en toda la cuenca $\Omega(z^*)$. En efecto, si $z_0 \in \Omega(z^*)$, entonces $\lim_{n\to\infty} f^n(z) = z^*$ unif. en V, entorno de z_0. Por tanto, existe m de modo que $f^m(z) \in D_\delta$ para $z \in V$ y podemos definir $\hat{\phi}(z) = \lambda^{-m}\phi(f^m(z))$. De la definición de ϕ en D_δ, se sigue que

$$\hat{\phi}(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{m+n}(z)}{\lambda^{m+n}} = \lambda^{-m} \lim_{n\to\infty} \phi_n(f^m(z)). \tag{8}$$

Es fácil probar que la definición no depende de m y que $\hat{\phi}$ verifica la identidad $\hat{\phi}(f(z)) = \lambda\hat{\phi}(z)$ para todo $z \in \Omega(z^*)$.

Índice

Abordamos ahora el difícil problema de la existencia de linealización en un entorno de un punto fijo indiferente z_0. La existencia de linealización depende de la función f y, en particular, del multiplicador $\lambda = f'(z_0)$. En el caso racionalmente indiferente, la existencia de pétalos atractores es incompatible con la linealización. Por ello, sólo queda dilucidar el caso de los puntos irracionalmente indiferentes.
Recordemos que entonces expresamos el multiplicador de la forma $\lambda = \exp(2\pi\theta i)$, siendo $\theta \notin \mathbb{Q}$. Si existe linealización, el punto fijo recibe el nombre de punto de Siegel. Si no la hay, se dirá que es un punto de Cremer. Precisamente, una componente del conjunto de Fatou en la que f es conjugada de una función lineal $g(z) = \lambda z$ (con λ como antes) recibe el nombre de disco de Siegel o disco de rotación.

En la literatura clásica los puntos de Siegel se llamaban centros y el problema de su existencia se denominó problema del centro.

Si $f(z)$ puede ser linealizada, es decir, si es conjugada en un entorno U del origen de $g(w) = \lambda w$, entonces en el entorno U no puede haber puntos periódicos de $f(z)$ diferentes del punto fijo z_0. Más adelante veremos que el conjunto de Julia de f, $\mathbb{J}(f)$, es el cierre del conjunto formado por todos los puntos periódicos repulsores. Por ello, el entorno U estaría incluido en su complemento, el conjunto de Fatou de f.

Vamos a hacer una breve historia de este problema.

En 1912, E. Kasner planteó la conjetura de que la linealización siempre era posible. Pero 5 años más tarde, G. A. Pfeiffer probó que Kasner estaba equivocado, pues para ciertas funciones mostró que la linealización no era posible. En 1919, Julia creyó que había probado que tal linealización nunca era posible, pero su prueba no era correcta. En 1927, en un bello trabajo, H. Cremer probó que para una elección genérica de λ en el disco unidad no había linealización posible. Concretamente, probó que en un entorno del punto fijo neutral hay una cantidad infinita de puntos periódicos de f.

Si ponemos $h = \phi^{-1}$ en la ecuación de Schröder

$$\phi(f(z)) = \lambda\phi(z),$$

ésta adopta la nueva forma

$$f(h(\zeta)) = h(\lambda\zeta) \ \text{normalizada por } h'(0) = 1. \qquad (9)$$

Teorema

Una solución h de la ecuación anterior en $\{\zeta : |\zeta| < r\}$ es univalente.

Prueba: Supongamos que $h(\zeta_1) = h(\zeta_2)$. Entonces $f(h(\zeta_1)) = f(h(\zeta_2))$ y se sigue de (9) que $h(\lambda\zeta_1) = h(\lambda\zeta_2)$. Repitiendo el proceso se obtiene $h(\lambda^n\zeta_1) = h(\lambda^n\zeta_2)$ para $n \in \mathbb{N}$. Pero $\{\lambda^n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en la circunferencia $|z| = 1$, lo que implica que $h(z\zeta_1) = h(z\zeta_2)$ para todo $|z| = 1$.

Ahora escogemos $\varepsilon \in (1, r/s)$, donde $s = \max_{i=1,2}|\zeta_i|$ y consideramos la función $g(z) = h(z\zeta_1) - h(z\zeta_2)$ definida en $\mathbb{D}_\varepsilon$. Como g es nula en $|z| = 1$, el principio de identidad nos garantiza que g es nula en $\mathbb{D}$. Es decir, $h(z\zeta_1) = h(z\zeta_2)$ para $|z| < 1$. Finalmente, nótese que h es inyectiva en un entorno del origen suficientemente pequeño por ser $h'(0) = 1$.

Ahora escogemos $\varepsilon \in (1, r/s)$, donde $s = \max_{i=1,2}|\zeta_i|$ y consideramos la función $g(z) = h(z\zeta_1) - h(z\zeta_2)$ definida en $\mathbb{D}_\varepsilon$. Como g es nula en $|z| = 1$, el principio de identidad nos garantiza que g es nula en $\mathbb{D}$. Es decir, $h(z\zeta_1) = h(z\zeta_2)$ para $|z| < 1$. Finalmente, nótese que h es inyectiva en un entorno del origen suficientemente pequeño por ser $h'(0) = 1$.

Teorema

La ecuación de Schröder (9) tiene solución si y sólo si (f^n) es uniformemente acotada en un entorno del origen.

Prueba:

Si h es una solución de (9) en $\mathbb{D}_r$, entonces

$$f^n(z) = h(\lambda^n h^{-1}(z)). \tag{10}$$

Escogemos $s \in (0, r)$ y ponemos $U = h(\mathbb{D}_s)$. Si $K = \{\lambda^n h^{-1}(z) : n \in \mathbb{N}, z \in U\}$, es obvio que $K \subset \mathbb{D}_s$. Como h es continua en $\overline{\mathbb{D}}_s$, existe $M > 0$ tal que $|h(\lambda^n h^{-1}(z))| \leq M$ para todo $z \in U$ y (10) prueba la necesidad.
Recíprocamente, sea $|f^n(z)| \leq M$ para $z \in U$, donde U es un entorno del origen. Definimos ϕ_n por

$$\phi_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{-j} f^j(z).$$

Nótese que $|\phi_n(z)| \leq M$ para z en U, por lo que (ϕ_n) posee una subsucesión convergente uniformemente hacia una función ϕ analítica en U. Por otro lado, veamos la forma que tiene $\phi_n \circ f$

$$\phi_n(f(z)) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{-j} f^{j+1}(z) = \lambda\phi_n(z) + \frac{1}{n}(\lambda^{-n} f^n(z) - \lambda z).$$

Como el último sumando de la derecha converge uniformemente a 0 en U, la función límite ϕ verifica

$$\phi(f(z) = \lambda\phi(z), \text{ para todo } z \in U.$$

Por último, como $f'(0) = \lambda$, se sigue de la definición de ϕ_n que $\phi_n'(0) = 1$ para $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\phi'(0) = 1$ y $h = \phi^{-1}$ es la solución de (9) buscada.

Nota

Como una consecuencia del teorema anterior, vamos a probar que, si f es topológicamente conjugada con λz, entonces es conformemente conjugada. Sea h un homeomorfismo verificando $h(0) = 0$ y $h^{-1} \circ f \circ h(\zeta) = \lambda\zeta$ para $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}_\delta$. f es invariante en $U = h(\overline{\mathbb{D}}_\delta)$. En efecto, si $z \in U$, existe $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}_\delta$ y se tiene

$$f(z) = f(h(\zeta)) = h(\lambda\zeta) \in U.$$

Entonces $f^n(U) \subset U$ para $n \in \mathbb{N}$ y concluimos que (f^n) es uniformemente acotada en U y el teorema anterior concluye la prueba.

Definición

Un número real θ se llama diofantino de orden κ si no es aproximable por números racionales en el sentido de que existe $\epsilon > 0$ y tal que

$$|\theta - \frac{p}{q}| > \frac{\epsilon}{q^{\kappa}} \quad p, q \in \mathbb{Z},\ q > 0. \tag{11}$$

Denotamos por $D(\kappa)$ el conjunto formado por todos los números diofantinos de orden κ.

Definición

Un número real θ se llama diofantino de orden κ si no es aproximable por números racionales en el sentido de que existe $\epsilon > 0$ y tal que

$$|\theta - \frac{p}{q}| > \frac{\epsilon}{q^\kappa} \quad p, q \in \mathbb{Z},\ q > 0. \tag{11}$$

Denotamos por $D(\kappa)$ el conjunto formado por todos los números diofantinos de orden κ.

Fijado $q \in \mathbb{Z}$, sea p el entero más cercano a $q\theta$, de modo que $|\theta q - p| \leq 1/2$. Entonces para $\lambda = e^{2\pi\theta i}$ se tiene

$$|\lambda^q - 1|^2 = 2(1 - \cos(2\pi\theta q)) = 4sen^2(\pi\theta q),$$

luego

$$|\lambda^q - 1| = 2|sen(\pi\theta q)| = 2|sen(\pi(q\theta - p))|.$$

Como $|seny| \geq (2/\pi)|y|$ para $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, se sigue que

$$4|q\theta - p| \leq |\lambda^q - 1| \leq 2\pi|q\theta - p|.$$

A partir de la relación anterior es fácil deducir la equivalencia de (11) con

$$|\lambda^q - 1| > \frac{\epsilon'}{q^{\kappa - 1}}, \tag{12}$$

para algún $\epsilon' > 0$ y $q \in \mathbb{N}$.

Como $|seny| \geq (2/\pi)|y|$ para $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, se sigue que

$$4|q\theta - p| \leq |\lambda^q - 1| \leq 2\pi|q\theta - p|.$$

A partir de la relación anterior es fácil deducir la equivalencia de (11) con

$$|\lambda^q - 1| > \frac{\epsilon'}{q^{\kappa-1}}, \tag{12}$$

para algún $\epsilon' > 0$ y $q \in \mathbb{N}$.

Teorema

Si $\kappa > 2$, entonces el conjunto de los números diofantinos del intervalo $[0, 1]$ tiene medida 1.

Prueba

Sea $U(\epsilon)$ el conjunto de todos los $\theta \in [0,1]$ tales que existe p/q de modo que $|\theta - p/q| < \epsilon/q^\kappa$. Se tiene

$$U(\varepsilon) \subset \cup_{p,q} E(\frac{p}{q}, \frac{\varepsilon}{q^\kappa}).$$

La medida de este conjunto es menor o igual que

$$\sum_{q=1}^{\infty} q \frac{2\epsilon}{q^\kappa},$$

pues para cada q hay q formas diferentes de elegir p/q. Como $\kappa > 2$, la serie anterior es convergente y su suma tiende a 0 cuando $\epsilon \to 0$.

Entonces el conjunto $\cap_{\epsilon>0} U(\epsilon)$ tiene medida nula y, por tanto, su complemento en $[0, 1]$ tiene medida 1. Nótese que este conjunto es precisamente $D(\kappa)$.

Teorema (Siegel)

Si θ es diofantino de cualquier orden, toda función analítica con un punto fijo con multiplicador $\lambda = e^{2\pi\theta i}$ es localmente linealizable.

Índice

Sea f una función para la que el origen es un punto fijo superatractor. En un entorno del origen

$$f(z) = b_0 z^q + b_1 z^{q+1} + \cdots ,$$

siendo $b_0 \neq 0$ y $q \geq 2$. Probamos en el siguiente teorema que f es conjugada analíticamente en un entorno del punto fijo de una función del tipo $h(z) = z^q$. Necesitamos el siguiente Lema.

Lema

Sean $n \geq 2$ y $z^{1/n}$ la rama principal de la raíz $n-$ésima definida en $\mathbb{D}(1, 1/2)$, entonces

$$|z^{1/n} - 1| < 2|z - 1|/n < 1/n.$$

Prueba:

Para cada $z \in \mathbb{D}(1, 1/2)$, sea γ el segmento que une 1 con z. Entonces

$$\int_\gamma \phi'(z)dz = z^{1/n} - 1,$$

donde $\phi(z) = z^{1/n}$. Entonces

$$|z^{1/n} - 1| \leq \int_\gamma |\phi'(z)|dz| \leq |z - 1| \cdot \max\{|\phi'(w)| : w \in \gamma\}.$$

Como $\phi'(z) = z^{1/n}/(nz)$, para $z \in \mathbb{D}(1, 1/2)$ se tiene

$$|\phi'(z)| = \frac{1}{n|z|^{(1-(1/n)}} \leq \frac{2^{1-(1/n)}}{n} < \frac{2}{n}.$$

Tenemos finalmente

$$|z^{1/n} - 1| \leq \frac{2|z-1|}{n} < \frac{1}{n}.$$

Teorema

En las condiciones anteriores, existe una única función g definida y analítica en un entorno del origen tal que
(a) $g(0) = 0$ y $g'(0) = 1$ y (b) $g \circ f \circ g^{-1}(z) = z^q$.

Prueba: Conjugando con la función $\phi(z) = \lambda z$, siendo $\lambda^{q-1} = b_0$, podemos suponer que $b_0 = 1$. Entonces el desarrollo en serie de Taylor en el origen tiene la forma

$$f(z) = z^q + b_1 z^{q+1} + \cdots = z^q(1 + h(z)), \tag{13}$$

convergente para $|z| \leq R$. Pero $h(z) = z(b_1 + b_2 z + \cdots)$, de modo que

$$|h(z)| \leq K|z|, \tag{14}$$

para $|z| \leq R$, donde $K = \max\{|h(z)/z| : |z| \leq R\}$.

Si escogemos $\delta < \min\{1/4, R, 1/(2k)\}$, para $z \in \mathbb{D}_\delta$ se tiene

$$|f(z)| = |z|^q |1 + h(z)| \leq |z|^q (1 + \delta K) \leq |z| \delta^{q-1} (1 + \delta K) < \frac{|z|}{2}.$$

Por tanto, $f(\mathbb{D}_\delta) \subset \mathbb{D}_\delta$ y es fácil deducir que

$$|f^n(z)| \leq \frac{|z|}{2^n} \quad (z \in \mathbb{D}_\delta). \tag{15}$$

Para $z \in \mathbb{D}_\delta$ y $n \geq 0$, por (14) y (15)se tiene

$$|h(f^n(z))| \leq K |f^n(z)| \leq K \frac{|z|}{2^n} < \frac{1}{2^{n+1}},$$

lo que muestra que $1 + h(f^n(z))$ pertenece al disco $\mathbb{D}(1, 1/2)$ y podemos considerar la $q^{n+1}-$raíz de $1 + h(f^n(z))$, que denotamos por $h_{n+1}(z)$, para $z \in \mathbb{D}_\delta$. Por el Lema anterior, sabemos que

$$|h_{n+1}(z) - 1| < \frac{1}{q^{n+1}} \quad (z \in \mathbb{D}_\delta). \tag{16}$$

Ahora consideramos el producto infinito

$$g(z) = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} h_n(z),$$

que converge uniformemente en $\mathbb{D}_\delta$ por (16). En efecto, basta recordar el teorema siguiente.

Teorema

(1) El producto infinito $\prod_n (1 + a_n)$ converge absolutamente si y sólo si es convergente la serie $\sum_n |a_n|$.
(2) El producto infinito $\prod_n (1 + a_n(z))$ converge absolutamente y uniformemente si y sólo si es uniformemente convergente la serie $\sum_n |a_n(z)|$.

Es obvio que $g(0) = 0$ y $g'(0) = 1$. Para probar la parte (b), mostraremos que se verifica

$$g_n(f(z)) = g_{n+1}(z)^q \text{ para } n \in \mathbb{N}\ z \in \mathbb{D}_\delta, \tag{17}$$

donde $g_n(z) = zh_1(z) \cdots h_n(z)$. Para ello, se precisa la igualdad

$$h_{n+1}(f(z)) = h_{n+2}(z)^q \text{ para } n \in \mathbb{N}\ z \in \mathbb{D}_\delta. \tag{18}$$

En efecto, se tiene

$$[h_{n+1}(f(z))]^{q^{n+1}} = 1 + h(f^{n+1}(z)) = [h_{n+2}(z)^q]^{q^{n+1}},$$

lo que prueba la relación (18).

Finalmente, podemos probar (17)

$$g_n(f(z)) = f(z)h_1(f(z))\cdots h_n(f(z)) = f(z)[h_2(z)\cdots h_{n+1}(z)]^q =$$

$$= z^q(1+h(z))[h_2(z)\cdots h_{n+1}(z)]^q = g_{n+1}(z)^q,$$

pues $1+h(z) = h_1(z)^q$ por definición, para todo $z \in \mathbb{D}_\delta$. De esta forma queda probado (17) y tomando límite cuando $n \to \infty$ se deduce

$$g(f(z)) = g(z)^q \text{ para } z \in \mathbb{D}_\delta.$$