El conjunto de Julia de una función polinómica

C. Piñeiro

Departamento de Ciencias Integradas
Universidad de Huelva

Índice

Índice

Los conjuntos de Fatou y Julia de las funciones polinómicas tienen propiedades específicas que desarrollamos en esta sección.

Teorema

Si $f(z) = a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \cdots + a_{k-1} z + a_k$ con $k \geq 2$, existe $R(f) > 0$ tal que:

$$|z| < |f(z)| < \cdots < |f^n(z)| < \cdots, \text{ para } |z| > R(f) \text{ y } n \in \mathbb{N}$$

y, en consecuencia, $\lim_{n\to\infty} f^n(z) = \infty$ para $|z| > R(f)$.

Prueba

(1) En primer lugar, hacemos la prueba para el caso de polinomios mónicos ($a_0 = 1$).
De la igualdad

$$\frac{f(z)}{z^k} = 1 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_k}{z^k},$$

se sigue

$$\left|\frac{f(z)}{z^k}\right| \geq \left|1 - \left|\frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_k}{z^k}\right|\right|. \tag{1}$$

Como $\lim_{z\to\infty}(a_1/z + \cdots + a_k/z^k) = 0$, escogemos $R > 0$ de modo que $|a_1/z + \cdots + a_k/z^k| < 1/2$ para $|z| > R$. Esto junto con (1) permite obtener

$$|f(z)| > \frac{|z|^k}{2} > |z| \ \text{ para } |z| > \max\{2, R\}. \tag{2}$$

Si ponemos $R(f) = \max\{2, R\}$, a partir de (2) se deduce la relación

$$|z| < |f(z)| < \cdots < |f^n(z)| < \cdots$$

para $n \in \mathbb{N}$ y $|z| > R(f)$.

(2) Sea ahora $f(z) = a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \cdots a_{k-1} z + a_k$ con $a_0 \neq 1$. Sea α una raíz de índice $k-1$ de a_0 ($a_0 = \alpha^{k-1}$). La conjugada de f mediante $w = \phi(z) = \alpha z$ es el polinomio mónico:

$$g(w) = \phi \circ f \circ \phi^{-1}(w) = \alpha f(\frac{w}{\alpha}) = w^k + \alpha a_1 \left(\frac{w}{\alpha}\right)^{k-1} + \cdots + \alpha a_k.$$

Ponemos $R(f) = R(g)/|\alpha|$, donde $R(g)$ se escoge como en la parte (1).
Tenemos que probar que $|f(z)| > |z|$ para $|z| > R(f)$.

En efecto, escogido z de modo que $|z| > R(f)$, sea $w = \alpha z$. Entonces por (1) se verifica $|g(w)| > |w|$ ó, en términos de f:

$$|\alpha f(\frac{w}{\alpha})| > |\alpha z|.$$

Se sigue de lo anterior que $|f(z)| > |z|$.

En efecto, escogido z de modo que $|z| > R(f)$, sea $w = \alpha z$. Entonces por (1) se verifica $|g(w)| > |w|$ ó, en términos de f:

$$|\alpha f(\frac{w}{\alpha})| > |\alpha z|.$$

Se sigue de lo anterior que $|f(z)| > |z|$.

Obviamente, el teorema nos garantiza que el conjunto relleno de Julia de f está contenido en el disco cerrado de centro el origen y radio $R(f)$. El siguiente resultado profundiza más en este sentido y nos ofrece una estrategia a la hora de obtener una imagen del conjunto relleno de Julia.

Teorema

En las condiciones anteriores, se verifica

$$\mathbb{B}(f) = \{z \in \mathbb{C} : |f^n(z)| \leq R(f) \ (\forall n \in \mathbb{N})\}.$$

Prueba:

Sólo se necesita probar la inclusión

$$\mathbb{B}(f) \subset \{z \in \mathbb{C} : |f^n(z)| \leq R(f) \ (\forall n \in \mathbb{N})\}.$$

Por reducción al absurdo, sea $z \in \mathbb{B}(f)$ tal que existe $m \in \mathbb{N}$ verificando $|f^m(z)| > R(f)$. Aplicando el teorema anterior a $w = f^m(z)$, se sigue que

$$\infty = \lim_{n\to\infty} f^n(w) = \lim_{n\to\infty} f^{n+m}(z)$$

y hemos obtenido una contradicción.

Prueba:

Sólo se necesita probar la inclusión

$$\mathbb{B}(f) \subset \{z \in \mathbb{C} : |f^n(z)| \leq R(f) \ (\forall n \in \mathbb{N})\}.$$

Por reducción al absurdo, sea $z \in \mathbb{B}(f)$ tal que existe $m \in \mathbb{N}$ verificando $|f^m(z)| > R(f)$. Aplicando el teorema anterior a $w = f^m(z)$, se sigue que

$$\infty = \lim_{n\to\infty} f^n(w) = \lim_{n\to\infty} f^{n+m}(z)$$

y hemos obtenido una contradicción.
Hemos visto que ∞ es un punto fijo atractor de toda función polinómica de grado mayor o igual que 2 y lo que acabamos de probar nos asegura que $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R(f)\}$ está contenido en la cuenca atractora de ∞. Como la cuenca está contenida en el conjunto de Fatou, se sigue que $\mathbb{J}(f)$ está contenido en $\overline{\mathbb{D}}(0, R(f))$.

Puntos de escape

Sea f una función entera. El conjunto

$$\mathbb{I}(f) = \{z \in \mathbb{C} : \lim_{n\to\infty} f^n(z) = \infty\}$$

se llama conjunto de escape de f.

Nótese que $\mathbb{I}(f)$ es completamente invariante.
Si f es polinómica, $\mathbb{I}(f)$ es no acotado dado que $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R(f)\} \subset \mathbb{I}(f)$. Probaremos que su complemento es $\mathbb{B}(f)$. Basta ver que toda órbita no acotada es, de hecho, divergente. En efecto, si $(f^n(z))$ es no acotada, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que $|f^N(z)| > R$. Por tanto, la órbita de $f^N(z)$ es divergente y finalmente la del propio z. Se tiene pues, la igualdad

$$\mathrm{Fr}(\mathbb{B}(f) = \mathrm{Fr}(\mathbb{I}(f)).$$

Para f general, se verifica la inclusión $\mathrm{Fr}(\mathbb{B}(f)) \subset \mathbb{J}(f)$. Ahora probaremos que, para funciones polinómicas, se trata de una igualdad.

Teorema

Si f es un polinomio de grado mayor o igual que 2, se verifica

$$\mathrm{Fr}(\mathbb{B}(f)) = \mathrm{Fr}(\mathbb{I}(f)) = \mathbb{J}(f).$$

Para f general, se verifica la inclusión $\mathrm{Fr}(\mathbb{B}(f)) \subset \mathbb{J}(f)$. Ahora probaremos que, para funciones polinómicas, se trata de una igualdad.

Teorema

Si f es un polinomio de grado mayor o igual que 2, se verifica

$$\mathrm{Fr}(\mathbb{B}(f)) = \mathrm{Fr}(\mathbb{I}(f)) = \mathbb{J}(f).$$

Prueba: Sean $z \in \mathbb{J}(f)$ y U un entorno abierto y conexo de z. Como $\mathbb{I}(f)$ es un conjunto infinito, el teorema de Montel aplicado a la familia (f^n) (que no es normal en U) nos dice que

$$\left[\bigcup_{n\geq 0} f^n(U)\right] \bigcap \mathbb{I}(f) \neq \emptyset.$$

Pero al ser $\mathbb{I}(f)$ completamente invariante, se sigue que $U \cap \mathbb{I}(f) \neq \emptyset$, lo que prueba que $z \in \overline{\mathbb{I}(f)}$.
Como el interior de $\mathbb{I}(f)$ está contenido en $\mathbb{F}(f)$, deducimos que $z \in \mathrm{Fr}(\mathbb{I}(f))$.

Nota

En realidad, la igualdad $\mathbb{J}(f) = \mathrm{Fr}(\mathbb{I}(f))$ es válida para cualquier función entera y la prueba de ello es similar a la del caso de una función polinómica. Ahora bien, se necesita usar el hecho de que $\mathbb{I}(f)$ es un conjunto infinito de puntos para cualquier función entera trascendente f.

Pero al ser $\mathbb{I}(f)$ completamente invariante, se sigue que $U \cap \mathbb{I}(f) \neq \emptyset$, lo que prueba que $z \in \overline{\mathbb{I}(f)}$.
Como el interior de $\mathbb{I}(f)$ está contenido en $\mathbb{F}(f)$, deducimos que $z \in \mathrm{Fr}(\mathbb{I}(f))$.

Nota

En realidad, la igualdad $\mathbb{J}(f) = \mathrm{Fr}(\mathbb{I}(f))$ es válida para cualquier función entera y la prueba de ello es similar a la del caso de una función polinómica. Ahora bien, se necesita usar el hecho de que $\mathbb{I}(f)$ es un conjunto infinito de puntos para cualquier función entera trascendente f.

Teorema

Si f es un polinomio de grado mayor o igual que 2, entonces $\mathbb{B}(f)$ es compacto y no vacío y el conjunto $\mathbb{I}(f)$ es conexo.

Prueba:

Al tener f grado mayor o igual que 2, la ecuación $f(z) = z$ posee siempre alguna solución z^*, que obviamente pertenece a $\mathbb{B}(f)$. Por tanto, basta probar que $\mathbb{I}(f)$ es abierto. Para el conjunto V anterior se tiene $f(V) \subset V$. Entonces, si $z_0 \in \mathbb{I}(f)$, $(f^n(z_0))$ es divergente y debe existir $N \in \mathbb{N}$ de modo que $|f^N(z_0)| > R$ y, por ello, $f^N(z_0) \in V$. Esto prueba la inclusión $\mathbb{I}(f) \subset \cup_{n\geq 1}(f^n)^{-1}(V)$. Por otra parte, si $z \in (f^n)^{-1}(V)$, entonces $f^n(z) \in V$ y se sigue que $\lim_{k\to\infty} f^{n+k}(z) = \infty$. Se tiene, pues, la igualdad

$$\mathbb{I}(f) = \cup_{n\geq 1}(f^n)^{-1}(V). \tag{3}$$

En particular, (3) prueba que $\mathbb{I}(f)$ es abierto y, por tanto, $\mathbb{B}(f)$ es compacto. Finalmente, para probar que $\mathbb{I}(f)$ es conexo, nótese que lo es cada $(f^n)^{-1}(V)$. En efecto, como $V \subset (f^n)^{-1}(V)$, de no ser este último conjunto conexo, se sigue que existe una componente conexa A disjunta con V. Entonces $A \subset \overline{\mathbb{D}}_R$ y es abierto.
Por el principio del módulo máximo, $M = \max\{|f^n(a)| : a \in A\}$ se alcanza en un punto z_0 frontera de A y $M = |f^n(z_0)| > R$. Por continuidad de f^n en z_0, existe un disco $\mathbb{D}(z_0)$ suficientemente pequeño para que esté contenido en $(f^n)^{-1}(V)$ y $|f^n(z)| > R$ para todo $z \in \mathbb{D}(z_0)$. Entonces $A \cup \mathbb{D}(z_0)$ contradice que A es un subconjunto conexo maximal de $(f^n)^{-1}(V)$. Como estos conjuntos crecen con n, la igualdad (3) permite deducir que $\mathbb{I}(f)$ es conexo.

Índice

En este apartado vamos a aplicar los resultados anteriores a la familia cuadrática $Q_c(z) = z^2 + c$, para recabar información sobre el conjunto de Julia de Q_c que denotamos por $\mathbb{J}_c$. Como veremos en el capítulo VII, existe una gran interrelación entre el conjunto de Mandelbrot y los conjuntos $\mathbb{J}_c$. Por ello, en dicho capítulo completaremos el estudio de la familia.

En este apartado vamos a aplicar los resultados anteriores a la familia cuadrática $Q_c(z) = z^2 + c$, para recabar información sobre el conjunto de Julia de Q_c que denotamos por $\mathbb{J}_c$. Como veremos en el capítulo VII, existe una gran interrelación entre el conjunto de Mandelbrot y los conjuntos $\mathbb{J}_c$. Por ello, en dicho capítulo completaremos el estudio de la familia.

El conjunto de Julia en los casos $c = 0, -2$ es muy simple: la circunferencia unidad y el intervalo $[-2, 2]$, respectivamente. Conjuntos de Julia tan simples son excepcionales. En general, el conjunto de Julia de Q_c posee una geometría sorprendente e intrincada, en muchos casos fractal.

Teorema

Sea $c \in \mathbb{C}$. Si $|z| > \max\{\sqrt{2|c|}, 2\}$, entonces $lim_{n\to\infty}|Q_c^n(z)| = \infty$.

El Teorema nos dice que el conjunto de Julia de la función $Q_c(z) = z^2 + c$ está contenido en el disco cerrado de centro el origen y radio $R(c) = \max\{\sqrt{2|c|}, 2\}$.

Teorema

Sea $c \in \mathbb{C}$. Si $|z| > \max\{\sqrt{2|c|}, 2\}$, entonces $lim_{n\to\infty}|Q_c^n(z)| = \infty$.

El Teorema nos dice que el conjunto de Julia de la función $Q_c(z) = z^2 + c$ está contenido en el disco cerrado de centro el origen y radio $R(c) = \max\{\sqrt{2|c|}, 2\}$.

Prueba: Partimos de la igualdad

$$\frac{Q_c(z)}{z^2} = 1 + \frac{c}{z^2}.$$

La desigualdad $|cz^{-2}| < 1/2$ se verifica para $|z| > \sqrt{2|c|}$. Como se vió en el teorema aludido, si ponemos $R(c) = \max\{2, \sqrt{2|c|}\}$, se verifica

$$|Q_c(z)| > |z| \text{ para } |z| > R(c).$$

Como aplicación del teorema sobre el conjunto relleno de Julia para una f. polinómica se obtiene

Criterio de escape

Si $z_0 \in \mathbb{C}$ es tal que existe $k \in \mathbb{N}$ con $|Q_c^k(z_0)| > R(c)$, entonces z_0 no pertenece a $\mathbb{B}(Q_c)$.

Los dos últimos resultados son de gran utilidad para elaborar el código de Matlab que nos permita obtener una imagen del conjunto $\mathbb{B}(Q_c)$. Por el Teorema anterior este conjunto está contenido en una región cuadrada del tipo $[-R(c), R(c)] \times [-R(c), R(c)]$. Mientras que el criterio de escape nos ofrece un test de parada.