

# Dinámica de la Familia Exponencial

C. Piñeiro

Departamento de Ciencias Integradas  
Universidad de Huelva

# Índice

- 1 La familia exponencial
- 2 El bouquet de Cantor
- 3 El plano paramétrico

# Índice

- 1 La familia exponencial
- 2 El bouquet de Cantor
- 3 El plano paramétrico

En esta sección estudiamos los puntos fijos de la **familia exponencial** dada por  $E_\lambda(z) = \lambda e^z$ , siendo  $\lambda$  real.

Comenzamos estudiando la existencia de puntos fijos reales.

(a)  $\lambda = 1/e$ .  $x^* = 1$  es un punto fijo real obvio. Como  $E'_\lambda(x^*) = \lambda e^{x^*} = x^* = 1$ , se trata de un punto fijo neutral. La recta  $y = ex$  es tangente en  $x = 1$  a la curva  $y = e^x$ , por lo que no existen más puntos fijos reales.

(b)  $\lambda > 1/e$ . Probaremos que la ecuación  $f(x) = \lambda e^x - x = 0$  no tiene soluciones reales. Que no tiene soluciones reales negativas es obvio. El signo de la derivada nos permitirá comprobar que tampoco existen raíces positivas

$$f'(x) = \lambda \left( e^x - \frac{1}{\lambda} \right) = \begin{cases} - & \text{si } 0 \leq x \leq \log(1/\lambda) \\ + & \text{si } \log(1/\lambda) \leq x. \end{cases}$$

Vemos que  $x_0 = \log(1/\lambda)$  es un mínimo absoluto de  $f$  en  $[0, +\infty)$ , luego  $f(x) \geq f(x_0) = 1 - \log(1/\lambda) > 0$ , para todo  $x \geq 0$ .

(c)  $\lambda < 0$ . En este caso  $f'(x) = \lambda e^x - 1 < 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , por lo que  $f$  es estrictamente decreciente en  $\mathbb{R}$ . A la vista de los límites en el infinito

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

deducimos que existe un único punto fijo  $x^*$  de  $f$ . Pueden darse los siguientes casos:

$-e < \lambda < 0$ .  $f(0) = \lambda < 0$  y  $f(-1) = \lambda/e + 1 > 0$ ; por tanto,  $x^* \in (-1, 0)$  y se trata de un punto atractor.

$\lambda < -e$ . Ahora  $f(-1) = \lambda/e + 1 < 0$ , pero  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .  
Entonces  $x^* < -1$  y se trata de un punto repulsor.

$\lambda = -e$ . En este caso  $x^* = -1$  es el único punto fijo de  $f$  y se trata de un punto neutral.

(d)  $0 < \lambda < 1/e$ . La tabla siguiente permite deducir que existen 2 puntos fijos:  $x^* \in (0, 1)$  (atractor) y  $x^{**} > 1$  (repulsor).

$x$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$\lambda$	$\lambda e - 1$	$+\infty$

Se sigue del estudio realizado en (b) que la exponencial compleja  $f(z) = e^z$  no tiene puntos fijos reales. Vamos a probar que tampoco tiene puntos fijos complejos atractores o neutrales.

Supongamos que  $z = x + iy$  es un punto fijo atractor para  $f$ .  
Entonces

$$|f'(z)| = |e^z| = |z| < 1,$$

por lo que  $e^x = |z| < 1$ . Por tanto,  $|z| < 1$  y  $x < 0$ . La igualdad  $e^z = z$  equivale al sistema

$$\begin{cases} e^x \cos y = x \\ e^x \operatorname{sen} y = y, \end{cases}$$

de donde se sigue la igualdad  $y/x = \operatorname{tgy}$ . Nótese que  $|y| < 1$  y, para estos valores de  $y$ ,  $\operatorname{tgy}$  e  $y$  tienen el mismo signo, lo que implica que la igualdad  $y/x = \operatorname{tgy}$  es imposible.

La prueba de que la exponencial compleja no posee puntos fijos neutrales es aún más fácil: si  $z$  es neutral,

$|f'(z)| = |e^z| = e^x = |z| = 1$ . Entonces  $x = 0$  e  $y = \pm 1$ , lo que es incompatible con  $e^z = z$ .

# Índice

- 1 La familia exponencial
- 2 El bouquet de Cantor
- 3 El plano paramétrico

Consideramos la familia exponencial dada por  $E_\lambda(z) = \lambda e^z$ , siendo  $0 < \lambda < 1/e$ . Con anterioridad, hemos visto que  $E_\lambda$  posee dos puntos fijos reales  $q_\lambda$  (atractor) y  $p_\lambda$  (repulsor) tales que  $q_\lambda < 1 < p_\lambda$ . Veamos que se tiene

$$q_\lambda < \log(1/\lambda) < p_\lambda. \quad (1)$$

En efecto, de ser  $q_\lambda$  y  $p_\lambda$  puntos fijos de  $E_\lambda$  se sigue que  $q_\lambda = E'_\lambda(q_\lambda) < E'_\lambda(\log(1/\lambda)) = 1 < E'_\lambda(p_\lambda) = p_\lambda$ . Pero la relación anterior no es otra cosa que

$$\lambda e^{q_\lambda} < \lambda e^{\log(1/\lambda)} < \lambda e^{p_\lambda},$$

lo que prueba (1).

Necesitamos escoger un número real  $\ell_\lambda$  en el intervalo  $(\log(1/\lambda), p_\lambda)$  de modo que

$$E_\lambda(\ell_\lambda) < \ell_\lambda. \quad (2)$$

Consideramos la función  $g(x) = e^x/x$  para  $x \geq 1$ . Nótese que  $g'(x) > 0$  para  $x > 1$ , por lo que  $g$  es estrictamente creciente en  $[1, +\infty)$ . Como  $g(1) = e$ ,  $g(p_\lambda) = 1/\lambda$  y  $1 < \log(1/\lambda) < p_\lambda$ , si escogemos  $\ell_\lambda$  en el intervalo  $(\log(1/\lambda), p_\lambda)$ , se tiene  $g(\ell_\lambda) < g(p_\lambda) = 1/\lambda$ . Por tanto, con esta elección de  $\ell_\lambda$  hemos conseguido que se verifique (2).

$E_\lambda$  aplica el semiplano  $\operatorname{Re}z < \ell_\lambda$  en sí mismo:

$$\operatorname{Re}(E_\lambda(z)) = \lambda e^{\operatorname{Re}z} \cos(\operatorname{Im}z) < \lambda e^{\ell_\lambda} = E_\lambda(\ell_\lambda) < \ell_\lambda.$$

Por Teorema ?? todas las órbitas que comienzan en el semiplano  $\operatorname{Re}z < \ell_\lambda$  son convergentes hacia  $q_\lambda$ . Por ello, este semiplano está contenido en la cuenca de atracción del punto fijo  $q_\lambda$  y, por tanto, está contenido en el conjunto de Fatou de  $E_\lambda$ . Esto implica que el conjunto de Julia de  $E_\lambda$  está contenido en el semiplano  $\operatorname{Re}z \geq \ell_\lambda$ .

Claim 1: Existe  $\mu > 1$  tal que  $|E'_\lambda(z)| \geq \mu$  para todo  $z$  en el semiplano  $\operatorname{Re}z \geq \ell_\lambda$ .

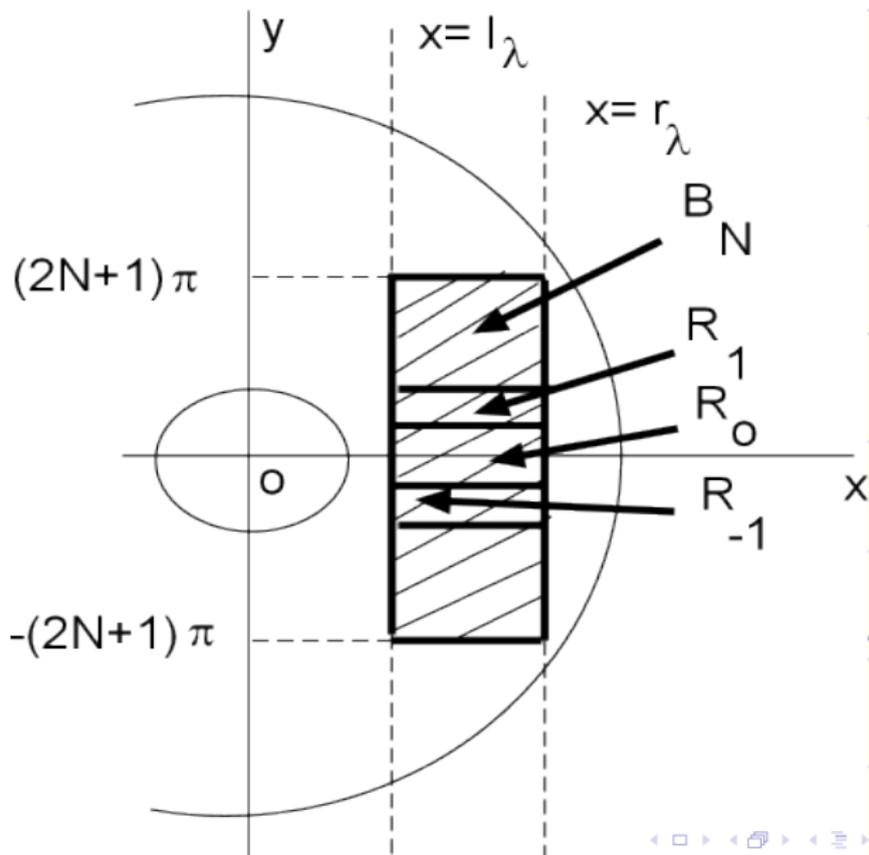
En efecto, si  $\operatorname{Re} z \geq \ell_\lambda$ , se tiene

$$|E'(z)| = \lambda e^{\operatorname{Re} z} \geq \lambda e^{\ell_\lambda} = \mu > \lambda e^{\log(1/\lambda)} = 1.$$

Ahora vamos a construir en el semiplano  $\operatorname{Re} z \geq \ell_\lambda$  una colección de conjuntos invariantes de Cantor para  $E_\lambda$ . Escogemos  $N \in \mathbb{N}$  y denotemos por  $B_N$  el rectángulo formado por los  $z = x + yi$  tales que

$$x \in [\ell_\lambda, r_\lambda] \text{ e } y \in [-(2N + 1)\pi, (2N + 1)\pi],$$

donde  $r_\lambda$  se escoge de modo que  $\lambda e^{r_\lambda} > r_\lambda + (2N + 1)\pi$  (ver figura siguiente).



$E_\lambda$  transforma el lado derecho de  $B_N$  en la circunferencia de centro el origen y radio  $\lambda e^{r_\lambda}$ , mientras que el lado izquierdo lo transforma en la circunferencia centrada en el origen y radio  $\lambda e^{\ell_\lambda}$ . Consideramos el anillo  $A = \{z : \lambda e^{\ell_\lambda} \leq |z| \leq \lambda e^{r_\lambda}\}$ . Vamos a probar las propiedades siguientes:

(1).  $B_N \subset \overset{\circ}{A}$ . Si  $z = x + iy \in B_N$ , entonces

$$\ell_\lambda \leq x \leq r_\lambda, \quad -(2N + 1)\pi \leq y \leq (2N + 1)\pi.$$

Por tanto, se verifica

$$|z| \leq |x| + |y| \leq r_\lambda + (2N + 1)\pi < \lambda e^{r_\lambda}.$$

Por otra parte, si  $z \in B_N$ , se tiene  $|z| \geq \ell_\lambda > \lambda e^{\ell_\lambda}$ .

(2).  $E_\lambda$  transforma  $B_N$  sobre  $A$ . Si  $z \in B_N$ , entonces  $E_\lambda(z) = \lambda e^x e^{yi}$  con  $x$  e  $y$  como antes. Luego

$$|E_\lambda(z)| = \lambda e^x \leq \lambda e^{r_\lambda} \quad \text{y} \quad |E_\lambda(z)| = \lambda e^x \geq \lambda e^{\ell_\lambda}.$$

Ahora, para cada  $i = -N, \dots, N$ , sea  $R_i \subset B_N$  el subrectángulo:

$$\ell_\lambda \leq \operatorname{Re} z \leq r_\lambda, \quad (2i + 1)\pi \leq \operatorname{Im} z \leq (2i + 1)\pi.$$

Como en (2), se prueba que  $E_\lambda$  aplica  $R_i$  sobre el anillo  $A$ . Veamos el carácter sobreyectivo. Si  $w \in A$ , entonces  $w = r \lambda e^{i\theta}$ , siendo  $r \in (e^{\ell_\lambda}, e^{r_\lambda})$  y  $\theta \in [(2i - 1)\pi, (2i + 1)\pi]$ . Ponemos  $x = \log r$  y  $z = x + \theta i$ . Es obvio que  $z \in R_i$  y  $E_\lambda(z) = \lambda e^x e^{\theta i} = \lambda r e^{\theta i} = w$ . De la igualdad  $E_\lambda(R_i) = A$ , se sigue que  $R_j \subset E_\lambda(R_i)$  para cualesquiera  $i, j$ .

Por Claim 1 sabemos que existe  $\mu > 1$  tal que

$$|(E'_\lambda(z))| \geq \mu > 1 \text{ para } \operatorname{Re}(z) \geq \ell_\lambda. \quad (3)$$

Por tanto, la propiedad anterior se verifica en cada  $R_j$ .  
 Definimos ahora  $\Lambda_N$  por

$$\Lambda_N = \{z \in B_N : E^j(z) \in B_N (\forall j)\}. \quad (4)$$

Para cada  $k = -\mathbb{N}, \dots, N$ , se define

$$S(k) = \{z : (2k - 1)\pi \leq \operatorname{Im}(z) \leq (2k + 1)\pi\}.$$

Denotamos por  $L_k$  la rama de la inversa de  $E_\lambda$  definida en el plano sin el semieje real negativo y con valores en  $S(k)$ .

Entonces, si  $z \in \mathbb{C} - \{z = x + 0yi : x < 0\}$ ,

$$L_k(z) = \log(|z|/\lambda) + \arg(z)i, \text{ con } \theta \in [(2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi].$$

Para todo  $k = -N, \dots, N$  se tiene

$$E_\lambda \circ L_k(z) = z \text{ para todo } z \in \mathbb{C} - \{z = x + 0i : x < 0\}. \quad (5)$$

### Claim 2

$L_k(R_j) \subset \overset{\circ}{R}_k$  para cualesquiera  $j, k$ .

Como  $R_j \subset A$ , cada  $w \in R_j$  puede expresarse en la forma  $w = r\lambda e^{\theta i}$ , siendo  $r \in (e^{\ell_\lambda}, e^{r_\lambda})$  y  $\theta \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ . Entonces  $L_k(w) = \log r + i\theta$  y como  $r \in (\ell_\lambda, r_\lambda)$ , se sigue que  $L_k(w) \in \overset{\circ}{R}_k$ .

Dado  $z \in \Lambda_N$ , nótese que  $\text{Im}(E_\lambda^n(z)) \neq (2j \pm 1)\pi$  para cualesquiera entero no negativo  $n$  y  $j = -N, \dots, N$ .

En efecto, si  $E_\lambda^n(z) = x + (2j \pm 1)\pi i$ , entonces  $E_\lambda^{n+1}(z) = -\lambda e^x$  que no pertenece a  $B_N$ .

Por tanto, cada  $E_\lambda^n(z)$  está en un determinado  $R_i^*$  (denotamos por  $R_i^*$  el subrectángulo  $R_i$  sin los lados superior e inferior). En consecuencia, cada  $z \in \Lambda_N$  determina una única sucesión  $\bar{s} = (s_0, s_1, s_2, \dots)$  con  $s_i = -N, \dots, N$  para cada  $i$  tal que

$$E_\lambda^n(z) \in R_{s_n}^* \quad \text{para } n = 0, 1, \dots \quad (6)$$

En las condiciones anteriores se verifica la igualdad

$$L_{s_n} \circ E_\lambda(E_\lambda^n(z)) = z. \quad (7)$$

En efecto, ponemos  $w = E_\lambda^n(z)$ . Sabemos que  $w \in R_{s_n}^*$ , luego  $w = x + yi$  con  $x \in [\ell_\lambda, r_\lambda]$  e  $y \in ((2s_n - 1)\pi, (2s_n + 1)\pi)$ .

Entonces  $L_{s_n}(E_\lambda(w)) = L_{s_n}(\lambda e^{x+iy}) = x + iy$ .

Por ello, consideramos el conjunto

$\Sigma_N = \{\bar{s} = (s_0, s_1, s_2, \dots) : -N \leq s_i \leq N, s_i \in \mathbb{Z}\}$  dotado con la topología producto. Denotamos por  $\sigma$  la aplicación definida de  $\Sigma_N$  en sí mismo dada por

$$\sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, \dots).$$

Vamos a probar que para cada  $\bar{s} \in \Sigma_N$ , el conjunto

$$\bigcap_{n \geq 0} L_{s_0} \circ \dots \circ L_{s_{n-1}}(B_N)$$

sólo contiene un punto que denotamos por  $z_{\bar{s}}$ .

Por ello, consideramos el conjunto

$\Sigma_N = \{\bar{s} = (s_0, s_1, s_2, \dots) : -N \leq s_i \leq N, s_i \in \mathbb{Z}\}$  dotado con la topología producto. Denotamos por  $\sigma$  la aplicación definida de  $\Sigma_N$  en sí mismo dada por

$$\sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, \dots).$$

Vamos a probar que para cada  $\bar{s} \in \Sigma_N$ , el conjunto

$$\bigcap_{n \geq 0} L_{s_0} \circ \dots \circ L_{s_{n-1}}(B_N)$$

sólo contiene un punto que denotamos por  $z_{\bar{s}}$ .

## TEOREMA

La aplicación  $\phi : \bar{s} \in \Sigma_N \rightarrow \phi(\bar{s}) = z_{\bar{s}} \in \Lambda_N$  es un homeomorfismo y representa una conjugación de  $\sigma$  con  $E_\lambda$  restringida a  $\Lambda_N$ .

## Prueba

1.  $\phi$  es sobre. Dado  $z \in \Lambda_N$ , sea  $\bar{s} = (s_n) \in \Sigma_N$  dada por (6), probaremos que  $\phi(\bar{s}) = z$ . Obviamente,  $L_{s_0} \circ E_\lambda(z) = z$ . Razonando por inducción, supongamos que

$$z = L_{s_0} \circ \cdots \circ L_{s_n}(E_\lambda^{n+1}(z)).$$

Usando la hipótesis de inducción y (7), resulta

$$\begin{aligned} L_{s_0} \circ L_{s_1} \circ \cdots \circ L_{s_{n+1}}(E_\lambda^{n+2}(z)) &= (L_{s_0} \circ L_{s_1} \circ \cdots \circ L_{s_n})(L_{s_{n+1}} \circ E_\lambda(E_\lambda^{n+1}(z))) = \\ &= (L_{s_0} \circ L_{s_1} \circ \cdots \circ L_{s_n}(E_\lambda^{n+1}(z))) = z. \end{aligned}$$

Esto prueba que  $z \in (L_{s_0} \circ L_{s_1} \circ \cdots \circ L_{s_n}(B_N))$  para todo entero  $n \geq 0$ . Por tanto,  $z = \phi(\bar{s})$ .

2)  $\phi$  es inyectiva. Sean  $\bar{s}, \bar{s}^* \in \Sigma_N$  con  $\bar{s} \neq \bar{s}^*$  y, sin embargo,  $\phi(\bar{s}) = \phi(\bar{s}^*) = z$ . Sea  $i$  el primer entero no negativo tal que  $s_i \neq s_i^*$ . Sabemos que

$$z \in L_{s_0} \circ L_{s_1} \circ \cdots \circ L_{s_n}(B_N) \cap L_{s_0^*} \circ L_{s_1^*} \circ \cdots \circ L_{s_n^*}(B_N).$$

Aplicando  $E_\lambda$   $i$  veces, obtenemos

$$E_\lambda^i(z) \in L_{s_i}(B_N) \cap L_{s_i^*}(B_N),$$

lo que es una contradicción, pues un complejo en  $L_{s_i}(B_N)$  tiene su parte imaginaria en  $((2s_i - 1)\pi, (2s_i + 1)\pi)$  y los de  $L_{s_i^*}(B_N)$  la tienen en  $((2s_i^* - 1)\pi, (2s_i^* + 1)\pi)$ .

3.  $\phi$  es continua. Sean  $\bar{s}^0 \in \Sigma_N$ ,  $z_0 = \phi(\bar{s}^0)$  y  $V = \mathbb{D}(z_0, \epsilon) \cap \Lambda_N$  un entorno de  $z_0$  en  $\Lambda_N$ . Recordemos que  $|E'_\lambda(z)| \geq \mu > 1$  para  $\operatorname{Re}(z) \geq \ell_\lambda$ . Escogemos  $k \in \mathbb{N}$  de modo que  $\operatorname{diam}(B_N)/\mu^{k+1} < \epsilon$  y consideramos el entorno  $U$  de  $\bar{s}^0$  para la topología producto dado por

$$U = \{\bar{s} = (s_i) : s_i = s_i^0, i = 0, 1, \dots, k\}.$$

Por la definición de  $\phi$ , se tiene

$$\phi(\bar{s}^0), \phi(\bar{s}) \in L_{s_0} \circ \dots \circ L_{s_k}(B_N).$$

Para cualesquiera  $z_1, z_2 \in B_N$ , se tiene

$$|L_{s_0} \circ \dots \circ L_{s_k}(z_1) - L_{s_0} \circ \dots \circ L_{s_k}(z_2)| \leq |z_1 - z_2| \sup\{|(L_{s_0} \circ \dots \circ L_{s_k})'(z)| : z \in B_N\}$$

De lo anterior es fácil deducir que

$$|\phi(\bar{s}) - \phi(\bar{s}^0)| \leq \text{diam}(B_N) \frac{1}{\mu^{k+1}} < \epsilon.$$

4.  $\phi$  tiene inversa continua. Sean  $z_0 \in \Lambda_N$ ,  $\bar{s}^0 = \phi^{-1}(z_0)$  y  $V = \{\bar{s} = (s_i) : s_i = s_i^0 (i = 0, 1, \dots, k)\}$  un entorno de  $\bar{s}^0$  para la topología producto en  $\Sigma_N$ . Sabemos que  $E_\lambda^i(z_0) \in R_{s_i^0}^*$ , para  $i = 0, 1, \dots, k$ . Por continuidad de las  $E^i$ , existe  $\delta > 0$  de modo que

$$E_\lambda^i(z) \in R_{s_i^0} \text{ para todo } z \in \mathbb{D}(z_0, \delta) \cap B_N, i = 0, 1, \dots, k.$$

Ponemos  $U = \mathbb{D}(z_0, \delta) \cap \Lambda$  y se tiene

$$z \in U \Rightarrow E_\lambda^i(z) \in R_{s_i^0}$$

Por tanto, para  $z \in U$ , si  $(t_i) = \phi^{-1}(z)$ , entonces  $t_i = s_i^0$  para  $i \leq k$ .

5. Tenemos que probar la igualdad  $E_\lambda(z) = \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}(z)$  para todo  $z \in \Lambda_N$ . Sean  $z \in \Lambda_N$  y  $(s_0, s_1, s_2, \dots) = \phi^{-1}(z)$ . Entonces

$$z \in L_{s_0} \circ L_{s_1} \circ \dots \circ L_{s_n}(B_N) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Se sigue que

$$E_\lambda(z) \in E_\lambda \circ L_{s_0} \circ L_{s_1} \circ \dots \circ L_{s_n}(B_N) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por (5) concluimos

$$E_\lambda(z) \in L_{s_1} \circ \dots \circ L_{s_n}(B_N) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Luego

$$E_\lambda(z) = \phi(s_1, s_2, \dots) = \phi \circ \sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}(z).$$

Por (3),  $|E'_\lambda(z)| \geq \mu > 1$  para todo  $z \in \Lambda_N$ . Entonces el Teorema?? nos asegura que  $\Lambda_N$  está contenido en el conjunto de Julia de  $E_\lambda$ . Finalmente, es obvio que la sucesión  $(\Lambda_N)$  es creciente y  $\overline{\cup_{n \geq 1} \Lambda_N} \subset \mathbb{J}(E_\lambda)$ . De hecho, también es cierta la inclusión contraria. Como  $\mathbb{J}(E_\lambda)$  es el cierre del conjunto formado por todos los puntos periódicos repulsores, basta probar que estos puntos pertenecen a  $\cup_N \Lambda_N$ . Sea  $z_0$  un punto periódico repulsor para  $E_\lambda$ , como pertenece al conjunto de Julia debe estar en el semiplano  $\operatorname{Re}(z) \geq \ell_\lambda$ . Tomando  $N$  suficientemente grande, conseguimos que todo el ciclo repulsor esté contenido en  $B_N$ . Obviamente, toda la órbita de  $z_0$  permanece en  $B_N$  y, por tanto,  $z_0 \in \Lambda_N$ . Queda probada, pues, la igualdad

$$\overline{\cup_{n \geq 1} \Lambda_N} = \mathbb{J}(E_\lambda) \quad (8)$$

## Definición

Sea  $C_N \subset \mathbb{J}(E_\lambda)$  un conjunto invariante. Diremos que  $C_N$  es un  $N$ -bouquet de Cantor para  $E_\lambda$  si existe un homeomorfismo

$$h: \Sigma_N \times [1, +\infty) \rightarrow C_N,$$

que verifica

- $h(\bar{s}, 1) = \phi(\bar{s}) = z_{\bar{s}}$ .
- $E_\lambda(h(\bar{s}, t)) = h(\sigma(\bar{s}), E_{1/e}(t))$ .
- Para cada  $\bar{s} \in \Sigma_N$ , se tiene  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(\bar{s}, t) = \infty$ .
- Si  $t \neq 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_\lambda^n(h(\bar{s}, t)) = \infty$ .

## TEOREMA

$\mathbb{J}(E_\lambda)$  contiene un  $N$ -bouquet de Cantor para cada  $N \in \mathbb{N}$  y  $\lambda \in (0, 1/e)$ .

## Prueba

(1) Para definir  $h$  fijamos  $c > 0$  de modo que  $\ell_\lambda < 1 + c < r_\lambda$  y consideramos la sucesión de funciones

$$h_k(\bar{s}, t) = L_{k, \bar{s}}(E_{1/e}^{k+1}(t) + c),$$

siendo  $L_{k, \bar{s}} = L_{s_0} \circ L_{s_1} \circ \dots \circ L_{s_k}$ . La función  $h$  va a ser el límite de las  $h_k$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . De la función  $E_{1/e}$  necesitamos saber que 1 es un punto fijo y que  $E_{1/e}^n(t) \rightarrow +\infty$  para  $t > 1$ , lo que se demuestra fácilmente por inducción.

(i) Nótese que  $E_{1/e}^n(1) + c = 1 + c \in B_N$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Luego

$$h_k(\bar{s}, 1) = L_{s_0} \circ \cdots \circ L_{s_k}(1 + c) \in L_{s_0} \circ \cdots \circ L_{s_k}(B_N).$$

Si  $z_{\bar{s}} = \phi(\bar{s})$ , también  $z$  pertenece a este último conjunto para todo  $k \geq 0$ . Por tanto, se verifica

$$|h_k(\bar{s}, 1) - z_{\bar{s}}| \leq \text{diam}(L_{s_0} \circ \cdots \circ L_{s_k}(B_N))$$

y ahora basta recordar que  $\text{diam}(L_{s_0} \circ \cdots \circ L_{s_k}(B_N)) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

(ii) Ahora vamos a probar que  $(h_n(\bar{s}, t))$  converge uniformemente en  $\Sigma_N \times [1, +\infty]$ :

$$|h_{n+1}(\bar{s}, t) - h_n(\bar{s}, t)| = |L_{n+1, \bar{s}}(E_{1/e}^{n+2}(t) + c) - L_{n, \bar{s}}(E_{1/e}^{n+1}(t) + c)| =$$

$$\begin{aligned}
 &= |L_{n,\bar{s}} \circ L_{s_{n+1}} (E_{1/e}^{n+2}(t) + c) - L_{n,\bar{s}}(E_{1/e}^{n+1}(t) + c)| = \\
 &= |L_{n,\bar{s}} \circ L_{s_{n+1}} (e^{E_{1/e}^{n+1}(t)-1} + c) - L_{n,\bar{s}}(E_{1/e}^{n+1}(t) + c)| = \\
 &= |L_{n,\bar{s}}[\log (e^{E_{1/e}^{n+1}(t)-1} + c) - \log \lambda + 2\pi s_{n+1}i] - L_{n,\bar{s}}(E_{1/e}^{n+1}(t) + c)|.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Con  $n$  y  $t$  fijos, aplicamos a  $g(x) = \log(e^s + x)$  el Teorema del valor medio en  $[0, c]$ , siendo  $s = E_{1/e}^{n+1}(t) - 1$ , obtenemos

$$\log (e^{E_{1/e}^{n+1}(t)-1} + c) = E_{1/e}^{n+1}(t) - 1 + cg'(\theta_{n,t}),$$

con  $\theta_{n,t} \in (0, c)$ . Sustituyendo en (9), resulta

$$|h_{n+1}(\bar{s}, t) - h_n(\bar{s}, t)| =$$

$$\begin{aligned}
 &= |L_{n,\bar{s}}(E_{1/e}^{n+1}(t) - 1 - \log \lambda + \frac{c}{e^s + \theta_{n,t}} + 2\pi s_{n+1}i) - L_{n,\bar{s}}(E_{1/e}^{n+1}(t) + c)| \leq \\
 &\leq \mu^{-(n+1)} | -1 + \log(1/\lambda) + c(\frac{1}{e^s + \theta_{n,t}} - 1) + 2\pi s_{n+1}i | \leq \\
 &\leq \frac{1 + \log(1/\lambda) + 2\pi N + 2c}{\mu^{n+1}} = \frac{M}{\mu^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

Ahora basta tener en cuenta que para  $m > n$  se tiene

$$\begin{aligned}
 |h_m(\bar{s}, t) - h_n(\bar{s}, t)| &\leq |h_m(\bar{s}, t) - h_{m-1}(\bar{s}, t)| + \dots + |h_{n+1}(\bar{s}, t) - h_n(\bar{s}, t)| \leq \\
 &\leq \sum_{k=n+1}^m \frac{M}{\mu^k}.
 \end{aligned}$$

Las siguientes acotaciones para  $\mathcal{R}e(h(\bar{s}, t))$  y  $\mathcal{I}m(h(\bar{s}, t))$  serán usadas más adelante

$$(2s_0 - 1)\pi \leq \mathcal{I}m(h(\bar{s}, t)) \leq (2s_0 + 1)\pi, \quad \mathcal{R}e(h(\bar{s}, t)) > t. \quad (10)$$

Para la prueba de la expresión situada a la izquierda, basta tener presente la siguiente propiedad obvia

$$(2s_0 - 1)\pi < \mathcal{I}m(h_n(\bar{s}, t)) < (2s_0 + 1)\pi. \quad (11)$$

para cualesquiera  $\bar{s} \in \Sigma_N$ ,  $t \geq 1$  y  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Y si tomamos límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , se obtiene para  $h$  la acotación deseada.

Las siguientes acotaciones para  $\mathcal{R}e(h(\bar{s}, t))$  y  $\mathcal{I}m(h(\bar{s}, t))$  serán usadas más adelante

$$(2s_0 - 1)\pi \leq \mathcal{I}m(h(\bar{s}, t)) \leq (2s_0 + 1)\pi, \quad \mathcal{R}e(h(\bar{s}, t)) > t. \quad (10)$$

Para la prueba de la expresión situada a la izquierda, basta tener presente la siguiente propiedad obvia

$$(2s_0 - 1)\pi < \mathcal{I}m(h_n(\bar{s}, t)) < (2s_0 + 1)\pi. \quad (11)$$

para cualesquiera  $\bar{s} \in \Sigma_N$ ,  $t \geq 1$  y  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Y si tomamos límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , se obtiene para  $h$  la acotación deseada.

Para la prueba de la expresión de la derecha en (10), procedemos como sigue.

Para  $k = 0$ , tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(h_0(\bar{s}, t)) &= \operatorname{Re}(L_{s_0}(E_{1/e}(t) + c)) = \log(E_{1/e}(t) + c) - \log \lambda = \\ &= \log(e^{t-1} + c) + \log(1/\lambda) \geq t - 1 + \log(1/\lambda) > t, \\ \text{ya que } \log(1/\lambda) &> 1.\end{aligned}$$

Para  $k = 0$ , tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(h_0(\bar{s}, t)) &= \operatorname{Re}(L_{s_0}(E_{1/e}(t) + c)) = \log(E_{1/e}(t) + c) - \log \lambda = \\ &= \log(e^{t-1} + c) + \log(1/\lambda) \geq t - 1 + \log(1/\lambda) > t,\end{aligned}$$

ya que  $\log(1/\lambda) > 1$ .

Razonando por inducción, suponemos que se verifica

$$\operatorname{Re}(h_k(\bar{s}, t)) > t, \text{ para } t \geq 1, \bar{s} \in \Sigma_N, k = 0, 1, \dots \quad (12)$$

y acotamos  $\operatorname{Re}(h_{k+1})$ :

$$\operatorname{Re}(h_{k+1}(\bar{s}, t)) = \operatorname{Re}(L_{s_0} \circ \dots \circ L_{s_{k+1}}(E_{1/e}^{k+2}(t) + c)) =$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}e(h_{k+1}(\bar{s}, t)) &= \mathcal{R}e(L_{s_0}(L_{s_1} \circ \cdots \circ L_{s_{k+1}}(E_{1/e}^{k+1}(E_{1/e}(t)) + c))) \geq \\ &\geq \log(|L_{s_1} \circ \cdots \circ L_{s_{k+1}}(E_{1/e}^{k+1}(E_{1/e}(t)) + c)|) - \log(\lambda) \geq \\ &\geq \log(E_{1/e}(t)) - \log(\lambda)\end{aligned}$$

habiendo aplicado en el último paso la hipótesis de inducción (12). Finalmente

$$\mathcal{R}e(h_{k+1}(\bar{s}, t)) \geq t - 1 + \log(\lambda) > t.$$

(2) Continuidad de  $h$ . Es suficiente probar que cada  $h_n$  es continua, ya que la convergencia uniforme garantiza que  $h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$  es continua. Dados  $(\bar{s}^0, t_0)$  y  $\epsilon > 0$ , sea  $V$  el entorno de  $\bar{s}^0$  dado por  $V = \{(s_i) : s_i = s_i^0 (\forall i \leq n)\}$ . Por la continuidad de  $L_{n, \bar{s}^0}(E_{1/e}^{n+1}(t) + c)$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|L_{n, \bar{s}^0}(E_{1/e}^{n+1}(t) + c) - L_{n, \bar{s}^0}(E_{1/e}^{n+1}(t_0) + c)| < \epsilon$$

para  $t \in U = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [1, +\infty)$ . Entonces, para  $(\bar{s}, t) \in V \times U$ , se tiene

$$|h_n(\bar{s}, t) - h_n(\bar{s}^0, t_0)| = |L_{n, \bar{s}^0}(E_{1/e}^{n+1}(t) + c) - L_{n, \bar{s}^0}(E_{1/e}^{n+1}(t_0) + c)| < \epsilon.$$

(4) Vamos a obtener la igualdad  $E_\lambda(h(\bar{s}, t)) = h(\sigma(\bar{s}), E_{1/e}(t))$  que es la condición (ii) de la definición anterior. Aplicando (5), para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene

$$\begin{aligned} E_\lambda(h_n(\bar{s}, t)) &= E_\lambda(L_{s_0} \circ \dots \circ L_{s_n}(E_{1/e}^{n+1}(t) + c)) = L_{\sigma(\bar{s}), n-1}(E_{1/e}^{n+1} + c) = \\ &= L_{\sigma(\bar{s}), n-1}(E_{1/e}^n(E_{1/e}(t)) + c) = h_{n-1}(\sigma(\bar{s}), E_{1/e}(t)). \end{aligned}$$

Tomando límite cuando  $n \rightarrow \infty$  se obtiene el resultado deseado.

(5)  $h$  es inyectiva. Supongamos que  $h(\bar{s}, t) = h(\bar{s}^*, t^*) = z$  pero  $(\bar{s}, t) \neq (\bar{s}^*, t^*)$ . Si probamos que  $s_0 = s_0^*$ , entonces es fácil obtener la igualdad  $\bar{s} = \bar{s}^*$ . En efecto, por (4) se tiene

$$h(\sigma(\bar{s}), E_{1/e}(t)) = h(\sigma(\bar{s}^*), E_{1/e}(t^*)),$$

lo que permite deducir que  $s_1 = s_1^*$ . Procediendo de esta forma probaríamos que  $\bar{s} = \bar{s}^*$ . Veamos, pues, que  $s_0 = s_0^*$ . Por (11), se verifica

$$(2s_0 - 1)\pi \leq \text{Im}(z) \leq (2s_0 + 1)\pi \text{ y } (2s_0^* - 1)\pi < \text{Im}(z) < (2s_0^* + 1)\pi,$$

lo que sólo es posible si  $s_0 = s_0^*$  ó son enteros consecutivos y  $\text{Im}(z) = 2\pi s + 1$  con  $s$  entero. En este último caso, para  $E_\lambda(z)$  se verifica

$$E_\lambda(z) = \lambda e^{\text{Re}(z)} \cdot e^{(2s+1)\pi i} = -\lambda e^{\text{Re}(z)} < 0.$$

(6)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(\bar{s}, t) = \infty$ . En (1) hemos visto que  $\operatorname{Re}(h(\bar{s}, t)) \geq t$  para cualesquiera  $\bar{s} \in \Sigma$  y  $t \geq 1$ . Por tanto, se tiene  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(h(\bar{s}, t)) = +\infty$ .

(6)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(\bar{s}, t) = \infty$ . En (1) hemos visto que  $\operatorname{Re}(h(\bar{s}, t)) \geq t$  para cualesquiera  $\bar{s} \in \Sigma$  y  $t \geq 1$ . Por tanto, se tiene  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(h(\bar{s}, t)) = +\infty$ .

(7) Si  $t \neq 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(E_\lambda^n(h(\bar{s}, t))) = +\infty$ . Por (5), para  $k, n \in \mathbb{N}$  con  $n \leq k$ , se tiene

$$\begin{aligned} E_\lambda^n(h_k(\bar{s}, t)) &= L_{s_n} \circ \cdots \circ L_{s_k}(E_{1/e}^{k+1}(t) + c) = \\ &= L_{s_n} \circ \cdots \circ L_{s_k}(E_{1/e}^{k-n+1}(E_{1/e}^n(t)) + c). \end{aligned}$$

Aplicando (12), obtenemos

$$\mathcal{R}e(E_\lambda^n(h_k(\bar{s}, t))) = \mathcal{R}e(L_{s_n} \circ \dots \circ L_{s_k}(E_{1/e}^{k-n+1}(E_{1/e}^n(t)) + c)) > E_{1/e}^n(t).$$

Finalmente, tomando límite cuando  $k \rightarrow \infty$  con  $n, t, \bar{s}$  fijos, resulta

$$\mathcal{R}e(E_\lambda^n(h(\bar{s}, t))) \geq E_{1/e}^n(t),$$

Como  $t > 1$ , se sigue el resultado deseado.

Aplicando (12), obtenemos

$$\operatorname{Re}(E_\lambda^n(h_k(\bar{s}, t))) = \operatorname{Re}(L_{s_n} \circ \dots \circ L_{s_k}(E_{1/e}^{k-n+1}(E_{1/e}^n(t)) + c)) > E_{1/e}^n(t).$$

Finalmente, tomando límite cuando  $k \rightarrow \infty$  con  $n, t, \bar{s}$  fijos, resulta

$$\operatorname{Re}(E_\lambda^n(h(\bar{s}, t))) \geq E_{1/e}^n(t),$$

Como  $t > 1$ , se sigue el resultado deseado.

Consideremos la curva  $h_{\bar{s}} : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $h_{\bar{s}}(t) = h(\bar{s}, t)$ . Podemos interpretarla como un 'pelo' que nace en  $z_{\bar{s}} = h_{\bar{s}}(1) = h(\bar{s}, 1) \in \Lambda_N$ . Por otra parte, la propiedad (iii) de la definición nos asegura que el pelo se extiende hasta el infinito, pues  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_{\bar{s}}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} h(\bar{s}, t) = \infty$ .

También cada  $h_{\bar{s}}$  es un homeomorfismo de  $[1, +\infty)$  sobre cierto subconjunto de  $\mathbb{C}$ . Por último, a la luz de la propiedad (ii) de la definición, deducimos que  $E_\lambda$  permuta los pelos como  $\sigma$  permuta las sucesiones en  $\Sigma_N$ . En efecto, basta tener presente la relación

$$E_\lambda(h(\bar{s}, t)) = h(\sigma(\bar{s}), E_{1/e}(t)).$$

A cada  $\bar{s} \in \cup_N \Sigma_N$  le corresponde un único pelo, pues  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_{\bar{s}, n}(E_{1/e}^{n+1}(t) + c)$  sólo depende de la sucesión  $(s_n)$ , independientemente de que pertenezca a un  $\Sigma_N$  u otro.

El conjunto  $\Gamma_N$  se denomina un  $N$ -bouquet de Cantor. Nótese que la condición (ii) de la definición garantiza que cada conjunto  $\Gamma_N$  es invariante para  $E_\lambda$ .

El conjunto  $\Gamma_N$  se denomina un  $N$ -bouquet de Cantor. Nótese que la condición (ii) de la definición garantiza que cada conjunto  $\Gamma_N$  es invariante para  $E_\lambda$ .

Los puntos  $h(\bar{s}, t)$  para  $t > 1$  tienen órbita divergente, por la propiedad (4) de la definición. Esto permite afirmar que pertenecen al conjunto  $\mathbb{J}(E_\lambda)$ . En efecto, basta tener en cuenta que  $E_\lambda$  sólo posee un punto singular, el origen, y  $E_\lambda$  es críticamente finita.

Los restantes puntos  $\{h(\bar{s}, 1) : \bar{s} \in \Sigma_N\} = \Lambda_N$  también están en el conjunto de Julia, como ya hemos visto, pero estos tienen órbita acotada.  $\Lambda_N$  se denomina **corona del bouquet de cantor**.

Los restantes puntos  $\{h(\bar{s}, 1) : \bar{s} \in \Sigma_N\} = \Lambda_N$  también están en el conjunto de Julia, como ya hemos visto, pero estos tienen órbita acotada.  $\Lambda_N$  se denomina **corona del bouquet de cantor**.

El conjunto  $\Gamma = \overline{\bigcup_{N \geq 1} \Gamma_N}$  se dirá que es un bouquet de Cantor. Veamos que se tiene la igualdad  $\mathbb{J}(E_\lambda) = \Gamma$ . Acabamos de ver la inclusión  $\Gamma_N \subset \mathbb{J}(E_\lambda)$  y la inclusión contraria es obvia pues anteriormente hemos visto que  $\mathbb{J}(E_\lambda) = \overline{\bigcup_{N \geq 1} \Lambda_N} \subset \overline{\bigcup_{N \geq 1} \Gamma_N}$ .

# Índice

- 1 La familia exponencial
- 2 El bouquet de Cantor
- 3 El plano paramétrico**

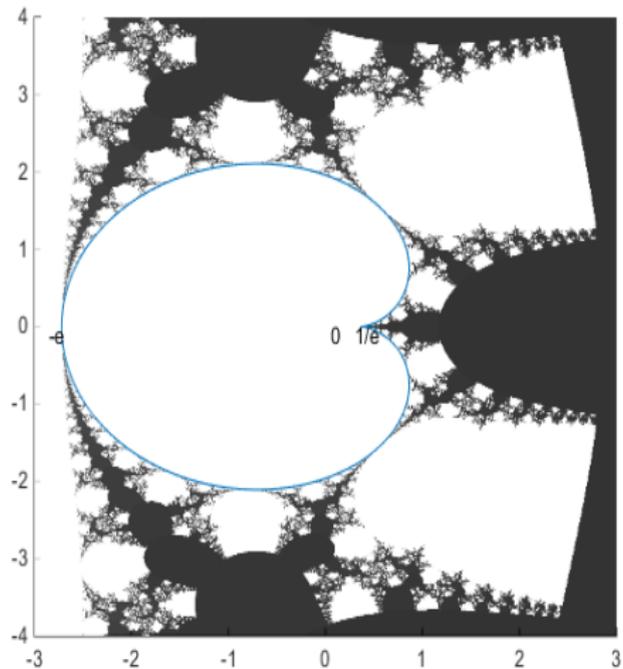
Como en el caso de la familia cuadrática, el plano paramétrico para  $E_\lambda$  es un subconjunto del  $\lambda$ -plano que refleja el comportamiento de la órbita crítica, que no es otra que la órbita del origen (único valor singular de  $E_\lambda$ ). Nuestro objetivo es dibujar y estudiar el plano paramétrico de la familia exponencial. Veremos que hay algunas similitudes con el conjunto de Mandelbrot pero también importantes diferencias. Finalmente, probaremos que hay una relación entre ambos.

Como en el caso de la familia cuadrática, el plano paramétrico para  $E_\lambda$  es un subconjunto del  $\lambda$ -plano que refleja el comportamiento de la órbita crítica, que no es otra que la órbita del origen (único valor singular de  $E_\lambda$ ). Nuestro objetivo es dibujar y estudiar el plano paramétrico de la familia exponencial. Veremos que hay algunas similitudes con el conjunto de Mandelbrot pero también importantes diferencias. Finalmente, probaremos que hay una relación entre ambos.

En la figura siguiente se muestra una porción del plano paramétrico. En blanco aparece la región donde la órbita crítica es acotada y en negro los valores de  $\lambda$  para los que la órbita de 0 mediante  $E_\lambda$  es no acotada. Para decidir si  $(E_\lambda(0))$  es acotada o no, procederemos como sigue.

Elegimos un número máximo de iteraciones  $N$  y aceptamos que la órbita es acotada si  $\operatorname{Re}(E_\lambda^n(0)) < 50$  para todo  $n \leq N$  y no acotada si  $\operatorname{Re}(E_\lambda^n(0)) > 50$  para algún  $n \leq N$ . Nótese que si  $\operatorname{Re}(E_\lambda^n(0)) > 50$ , entonces

$$|E_\lambda^{n+1}(0)| = \lambda e^{\lambda \operatorname{Re}(E_\lambda^n(0))} \geq \lambda e^{50\lambda}.$$



Veamos cómo es el conjunto de los  $\lambda$  tales que  $E_\lambda$  posee un punto fijo atractor  $z$ :

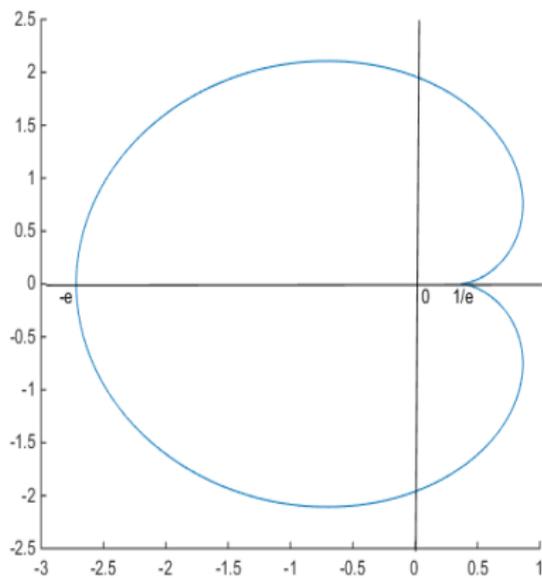
$$\lambda e^z = z, \quad E'_\lambda(z) = \lambda e^z = \zeta \text{ y } |\zeta| < 1.$$

Entonces  $\zeta = z$  y expresando  $\lambda$  en función del multiplicador  $\zeta$

$$\lambda = \zeta e^{-\zeta} \quad (|\zeta| < 1). \quad (13)$$

Para  $k \in \mathbb{N}$ , denotaremos por  $C_k$  el conjunto formado por todos los  $\lambda$  para los que  $E_\lambda$  posee un  $k$ -ciclo atractor. Por (13),  $C_1$  es la región interior a la cardioide de ecuación

$$\lambda = \zeta e^{-\zeta} \quad (|\zeta| = 1). \quad (14)$$



Pasamos ahora a ocuparnos de  $C_k$  para  $k \geq 2$ . Fijado  $k \geq 2$ , para cada  $\lambda \in C_k$ ,  $E_\lambda$  posee un  $k$ -ciclo atractor  $z_1, \dots, z_k$ .  
Recuérdese que  $(E_\lambda^k)'(z_i) = \prod_{j \leq k} E'_\lambda(z_j)$ ; por tanto, al menos para un  $i \leq k$  se cumple  $|z_i| < 1$ . Denotamos  $z_{i+1}$  por  $z_0(\lambda)$  y se verifica

$$|z_0(\lambda)| = |z_{i+1}| = |E_\lambda(z_i)| = |E'_\lambda(z_i)| < 1.$$

Pasamos ahora a ocuparnos de  $C_k$  para  $k \geq 2$ . Fijado  $k \geq 2$ , para cada  $\lambda \in C_k$ ,  $E_\lambda$  posee un  $k$ -ciclo atractor  $z_1, \dots, z_k$ . Recuérdese que  $(E_\lambda^k)'(z_i) = \prod_{j \leq k} E'_\lambda(z_j)$ ; por tanto, al menos para un  $i \leq k$  se cumple  $|z_i| < 1$ . Denotamos  $z_{i+1}$  por  $z_0(\lambda)$  y se verifica

$$|z_0(\lambda)| = |z_{i+1}| = |E_\lambda(z_i)| = |E'_\lambda(z_i)| < 1.$$

### Proposición

Cada  $C_k$  es abierto.

## Prueba

Por reducción al absurdo, supongamos que  $C_k$  no es abierto. Existen  $\lambda_0 \in C_k, \lambda_n \notin C_k$  tales que  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ . Como  $\lambda_0 \in C_k$ ,  $E_{\lambda_0}$  posee un punto  $k$ -periódico  $z^*$ . Luego

$$E_{\lambda_0}^k(z^*) = z^* \text{ y } |(E_{\lambda_0}^k)'(z^*)| < 1. \quad (15)$$

$(E_{\lambda}^k)'(z)$  es continua en  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ , luego existe  $U = \mathbb{D}(\lambda_0) \times \mathbb{D}(z^*, r)$  de modo que

$$|(E_{\lambda}^k)'(z)| < 1 \text{ para } (\lambda, z) \in U, \quad (16)$$

donde  $\mathbb{D}(\lambda_0)$  se escoge suficientemente pequeño para que  $\lambda_n \in \mathbb{D}(\lambda_0)$  para  $n \geq n_0$ . Ahora, para cada  $n \geq n_0$ , ponemos  $f_n(z) = E_{\lambda_n}^k(z) - z$  y probaremos que existe  $m_0 \geq n_0$  tal que  $(f_n)_{n \geq m_0}$  es uniformemente acotada en  $D(z^*, r)$  y, por tanto, normal en  $\mathbb{D}(z^*, r)$ .

En efecto, para  $n \geq n_0$  y  $z \in \mathbb{D}(z^*, r)$ , se tiene

$$|f_n(z) - f_n(z^*)| \leq |z - z^*| \cdot \sup\{|f'_n(w)| : w \in \mathbb{D}(z^*, r)\} \leq 2r,$$

dado que, por (16), se tiene  $|f'_n(w)| = |(E_{\lambda_n}^k)'(w) - 1| < 2$ . Por otro lado, a la vista de (15), se verifica

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z^*) = E_{\lambda_0}^k(z^*) - z^* = 0$ , por lo que existe  $m_0 \geq n_0$  de modo que  $|f_n(z^*)| \leq 1$  para  $n \geq m_0$ . Se sigue de manera obvia que

$$|f_n(z)| \leq 2r + 1 \text{ para } n \geq m_0 \text{ y } z \in \mathbb{D}(z^*, r).$$

Por el criterio de Marty,  $(f_n)_{n \geq m_0}$  es normal en  $\mathbb{D}(z^*, r)$ , luego existe una subsucesión  $(f_{n_p})_p$  que es uniformemente convergente en compactos en  $\mathbb{D}(z^*, r)$  hacia  $f(z) = E_{\lambda_0}^k(z) - z$ .

Finalmente, nótese que  $f(z^*) = 0$  pero  $f_n(z) \neq z$  en  $\mathbb{C}$ , lo que contradice el Teorema de Hurwitz.

Finalmente, nótese que  $f(z^*) = 0$  pero  $f_n(z) \neq z$  en  $\mathbb{C}$ , lo que contradice el Teorema de Hurwitz.

### Lema

Sea  $U \subset \mathbb{C}_k$  un abierto tal que  $\bar{U}$  es compacto y  $0 \notin \bar{U}$ . Existen constantes positivas  $c_1$  y  $c_2$  tales que

$$c_1 \leq |z_j(\lambda)| \leq c_2, \text{ para } \lambda \in U, j = 0, 1, \dots, k - 1.$$

Finalmente, nótese que  $f(z^*) = 0$  pero  $f_n(z) \neq z$  en  $\mathbb{C}$ , lo que contradice el Teorema de Hurwitz.

### Lema

Sea  $U \subset \mathbb{C}_k$  un abierto tal que  $\bar{U}$  es compacto y  $0 \notin \bar{U}$ . Existen constantes positivas  $c_1$  y  $c_2$  tales que

$$c_1 \leq |z_j(\lambda)| \leq c_2, \text{ para } \lambda \in U, j = 0, 1, \dots, k - 1.$$

### Prueba

Como acabamos de ver, para cada  $\lambda \in U$ ,  $z_0(\lambda)$  es un punto  $k$ -periódico para  $E_\lambda$  tal que  $|z_0(\lambda)| < 1$ . Los otros componentes del ciclo al que pertenece  $z_0(\lambda)$  son:  $E_\lambda^j(z_0(\lambda))$  con  $j = 1, \dots, k - 1$ . La siguiente desigualdad es obvia

$$\begin{aligned} & \sup\{|E_\lambda^j(z_0(\lambda))| : j = 0, 1, \dots, k - 1, \lambda \in U\} \leq \\ & \leq \sup\{|E_\lambda^j(z)| : j = 0, 1, \dots, k - 1, \lambda \in \bar{U}, z \in \bar{\mathbb{D}}\} \end{aligned}$$

y el supremo más a la derecha es finito por tratarse de un número finito de funciones continuas en el compacto  $\bar{\mathbb{D}} \times \bar{U}$ . La otra acotación se prueba de manera similar considerando el ínfimo y teniendo en cuenta que las funciones implicadas no se anulan en  $\bar{\mathbb{D}} \times \bar{U}$ .

$$\begin{aligned} & \sup\{|E_\lambda^j(z_0(\lambda))| : j = 0, 1, \dots, k-1, \lambda \in U\} \leq \\ & \leq \sup\{|E_\lambda^j(z)| : j = 0, 1, \dots, k-1, \lambda \in \bar{U}, z \in \bar{\mathbb{D}}\} \end{aligned}$$

y el supremo más a la derecha es finito por tratarse de un número finito de funciones continuas en el compacto  $\bar{\mathbb{D}} \times \bar{U}$ . La otra acotación se prueba de manera similar considerando el ínfimo y teniendo en cuenta que las funciones implicadas no se anulan en  $\bar{\mathbb{D}} \times \bar{U}$ .

### Proposición

Cada componente de  $C_k$  es simplemente conexa.

## Prueba

Sea  $C$  una componente conexa de  $C_k$  y consideremos la sucesión de funciones  $(G_n)$ , siendo  $G_n(\lambda) = E_\lambda^n(0)$ . Nótese que las  $G_n$  son funciones enteras. Sea  $\gamma \subset C$  una curva cerrada de Jordan y denotemos por  $D$  la región compacta que determina. Probaremos que  $D \subset C$ . Sea  $U \subset C$  un entorno abierto de  $\gamma$  tal que  $\bar{U} \subset C$ . Para cada  $\lambda \in C$ ,  $(G_{nk}(\lambda))$  converge hacia  $z_0(\lambda)$ , siendo  $z_0(\lambda)$  un punto  $k$ -periódico de  $E_\lambda$ . Por el Lema sabemos que  $|z_0(\lambda)| \leq c_2$  para cada  $\lambda \in U$ . Vamos a probar que  $(G_{kn})_n$  es normal en  $C$ . Fijado  $\lambda_0 \in C$ , sea  $\mu = |(E_{\lambda_0}^k)'(z_0(\lambda_0))| < 1$ . Por continuidad, existe un entorno  $V(\lambda_0) \times \mathbb{D}(z_0(\lambda_0), r)$  de  $(\lambda_0, z_0(\lambda_0))$  tal que

$$|(E_\lambda^k)'(z)| < \mu < 1, \text{ para } \lambda \in V(\lambda_0), z \in \mathbb{D}(z_0(\lambda_0), r), \quad (17)$$

donde  $V(\lambda_0) \subset \mathbb{C}$ . Para  $z \in \mathbb{D}(z_0(\lambda_0), r)$  y  $\lambda \in V(\lambda_0)$ , se tiene:

$$|E_\lambda^k(z) - E_{\lambda_0}^k(z_0(\lambda_0))| \leq \sup\{|(E_\lambda^k)'(w)| \cdot |z - z_0(\lambda_0)|\}.$$

Esto prueba que, para cada  $\lambda \in V(\lambda_0)$ , se verifica que

$$E_\lambda^k(\mathbb{D}(z_0(\lambda_0), r)) \subset \mathbb{D}(z_0(\lambda_0), r).$$

Como  $E_{\lambda_0}^{kn}(0) \rightarrow z_0(\lambda_0)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , se sigue que existe  $m \in \mathbb{N}$  de modo que  $E_{\lambda_0}^{km}(0) \in \mathbb{D}(z_0(\lambda_0), r)$ . Finalmente, usamos la continuidad de  $E_\lambda^{mk}(0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  para determinar un entorno  $W(\lambda_0)$  de modo que

$$E_\lambda^{mk}(0) \in \mathbb{D}(z_0(\lambda_0), r) \text{ para } \lambda \in W(\lambda_0).$$

Si  $V_0 = V(\lambda_0) \cap W(\lambda_0)$ , se tiene para  $\lambda \in V_0$

$$E_\lambda^{mk}(0) \in \mathbb{D}(z_0(\lambda_0), r) \text{ y } E_\lambda^k(\mathbb{D}(z_0(\lambda_0), r)) \subset \mathbb{D}(z_0(\lambda_0), r).$$

De las condiciones anteriores se sigue que  $G_{kn}(\lambda) \in D(z_0(\lambda_0), r)$  para  $n \geq m$  y  $\lambda \in V_0$ , lo que implica la normalidad de la sucesión  $G_{nkn}$  en  $V_0$ . Con la normalidad en la mano, tenemos que  $z_0(\lambda)$  es una función analítica en  $C$ . Sea  $\chi$  la función definida por  $\chi(\lambda) = (E_\lambda^k)'(z_0(\lambda))$  para cada  $\lambda \in C$ . Esta función es analítica y puede aplicarse el principio del módulo máximo en la región compacta  $D$ .  $|\chi(\lambda)| < 1$  para  $\lambda$  en  $\gamma$ , por tanto, también  $|\chi(\lambda)| < 1$  para  $\lambda$  en el interior de  $D$ . Sólo nos resta probar que, para cada  $\lambda$  en el interior de  $\gamma$ ,  $E_\lambda$  posee un punto  $k$ -periódico con multiplicador  $\chi(\lambda)$ . Para ello, nótese que  $E_\lambda^k(z_0(\lambda)) = z_0(\lambda)$  para  $z \in U$ . Entonces por el principio de identidad deducimos que se da la igualdad también en  $D$ .