Diferencias entre las dinámicas racional y entera

C. Piñeiro

Departamento de Ciencias Integradas
Universidad de Huelva

Índice

1. Diferencias entre las dinámicas racional y entera
2. Valores singulares
3. Componentes de Fatou. Clasificación
4. Dominios errantes y de Baker
5. El conjunto de Julia

Índice

1 Diferencias entre las dinámicas racional y entera
2 Valores singulares
3 Componentes de Fatou. Clasificación
4 Dominios errantes y de Baker
5 El conjunto de Julia

La principal diferencia entre la iteración de funciones racionales y la de funciones enteras trascendentes está relacionada con el punto ∞.

- Para las polinómicas este punto es un punto fijo superatractor.
- Para las racionales dinámicamente ∞ es un punto lo mismo que cualquier otro de la esfera de Riemann.
- Para las enteras trascendentes ∞ es una singularidad esencial. **El Teorema de Picard afirma que, en cualquier entorno reducido de ∞, la función alcanza todo valor complejo excepto, a lo sumo, un valor y toma cualquier otro valor un número infinito de veces.**

La principal diferencia entre la iteración de funciones racionales y la de funciones enteras trascendentes está relacionada con el punto ∞.

- Para las polinómicas este punto es un punto fijo superatractor.
- Para las racionales dinámicamente ∞ es un punto lo mismo que cualquier otro de la esfera de Riemann.
- Para las enteras trascendentes ∞ es una singularidad esencial. **El Teorema de Picard afirma que, en cualquier entorno reducido de ∞, la función alcanza todo valor complejo excepto, a lo sumo, un valor y toma cualquier otro valor un número infinito de veces.**

Este comportamiento de la función en las proximidades de ∞ produce sustanciales diferencias en la dinámica.

Índice

1 Diferencias entre las dinámicas racional y entera

2 Valores singulares

3 Componentes de Fatou. Clasificación

4 Dominios errantes y de Baker

5 El conjunto de Julia

La dinámica de las funciones racionales está determinada en gran medida por el comportamiento de las órbitas de los puntos críticos como indica el siguiente resultado.

Teorema

Si la función es racional, en la cuenca de atracción de todo ciclo atractor o parabólico hay un punto crítico.

El siguiente ejemplo muestra que en el caso de las funciones enteras el conjunto de las órbitas **singulares** debe ser ampliado.

Ejemplo

Sea $E_\lambda(z) = \lambda e^z$, siendo $\lambda \in (0, 1/e)$. Esta función no tiene puntos críticos y, sin embargo, posee dos puntos fijos reales y uno de ellos es atractor como se verá el apartado siguiente. Por tanto, E_λ no cumple el teorema anterior. En este ejemplo el papel de los valores críticos lo juega el cero que es un valor omitido por E_λ.

Técnicamente, 0 es lo que se denomina un valor asintótico.

Definición

Sean f entera trascendente y $w \in \hat{\mathbb{C}}$. Diremos que w es un valor asintótico de f si existe una curva continua $\gamma(t)$ verificando

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = \infty \text{ y } \lim_{t\to+\infty} f(\gamma(t)) = w.$$

En el caso de la función E_λ, para cualquier curva $\gamma(t)$ que verifique $\mathcal{R}e(\gamma(t)) \to -\infty$, se tiene

$$\lim_{t\to+\infty} |E_\lambda(\gamma(t))| = \lambda \lim_{t\to+\infty} e^{\mathcal{R}e(\gamma(t))} = 0.$$

Por tanto, 0 es un valor asintótico para E_λ.

Definición

Si f es entera, denotaremos por $\operatorname{sing}^{-1}(f)$ el conjunto formado por todos los valores críticos de f (= imágenes de los puntos críticos) y por los valores asintóticos de f.

Definición

Si f es entera, denotaremos por $\mathrm{sing}^{-1}(f)$ el conjunto formado por todos los valores críticos de f (= imágenes de los puntos críticos) y por los valores asintóticos de f.

La extensión del teorema anterior al caso de funciones enteras es el siguiente.

Teorema

Si f es una función entera trascendente y z_0 un punto periódico atractor o parabólico para f, entonces la órbita de algún valor singular es atraída por la órbita de z_0.

Índice

1 Diferencias entre las dinámicas racional y entera

2 Valores singulares

3 Componentes de Fatou. Clasificación

4 Dominios errantes y de Baker

5 El conjunto de Julia

- Si f es una función entera, llamaremos componente de Fatou a cada componente conexa del conjunto de Fatou. Como este conjunto es abierto, se trata de regiones maximales disjuntas.

- Si f es una función entera, llamaremos componente de Fatou a cada componente conexa del conjunto de Fatou. Como este conjunto es abierto, se trata de regiones maximales disjuntas.
- Su número puede ser finito o infinito, pero numerable.

- Si f es una función entera, llamaremos componente de Fatou a cada componente conexa del conjunto de Fatou. Como este conjunto es abierto, se trata de regiones maximales disjuntas.
- Su número puede ser finito o infinito, pero numerable.
- Recuérdese que $g(\Omega)$ es una región si Ω lo es.

- Si f es una función entera, llamaremos componente de Fatou a cada componente conexa del conjunto de Fatou. Como este conjunto es abierto, se trata de regiones maximales disjuntas.
- Su número puede ser finito o infinito, pero numerable.
- Recuérdese que $g(\Omega)$ es una región si Ω lo es.
- Si U es una componente de Fatou, por lo anterior cada $f^n(U)$ está necesariamente contenida en una componente de Fatou, digamos U_n.
  Pueden darse los siguientes casos:

1) **Dominios errantes**: todas las U_n sean distintas unas de otras ($U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$). Si este es el caso, diremos que la componente U es un dominio errante de f. Es conocido que las funciones racionales no tienen dominios errantes.

2) **Componentes periódicas**: si $f^n(U) \subset U$, diremos que U es una componente periódica y, si n es el menor natural verificando la condición anterior, n se dirá que es el periodo de la componente U. Si $n = 1$, entonces $f(U) \subset U$ y diremos que U es una componente fija de f. Si, además, se verifica que $f^{-1}(U) \subset U$, diremos que U es completamente invariante.

3) **Componentes preperiódicas**: si $f^k(U)$ es periódica, diremos que U es una componente preperiódica de f.

Teorema de clasificación de las componentes periódicas

Sean f una función racional o entera y U una componente de f con periodo n. Entonces una sola de las condiciones siguientes se verifica:

(1) U contiene un punto n-periódico atractor z^* y toda órbita que se inicia en U converge hacia z^*.

(2) Existe en su frontera un punto fijo neutral de f^n, z^*, con multiplicador igual a 1 con la propiedad de que todas las órbitas que nacen en U convergen a z^* (órbitas respecto de f^n).

(3) U es un disco de Siegel: U es simplemente conexa y f^n es conjugada en U de una rotación irracional $g(w) = exp(2\pi\theta i)w$, siendo $\theta \in (\mathbb{R}/\mathbb{Q})$ y $w \in \mathbb{D}$.

(4) U es un anillo de Herman (o de Arnold): U es equivalente a un anillo $A = \{z : 0 < |z| < r\}$ y f^n es conjugada en U con una rotación irracional en el anillo.

(5) f es entera y U es un dominio de Baker: U es no acotado en $\mathbb{C}$ y se tiene $\lim_{k\to\infty} f^{nk}(z) = \infty$, para cada $z \in U$.

Teorema

Sean f entera trascendente y $U \subset \mathbb{C}$ una componente preperiódica de Fatou. Entonces U es simplemente conexa.

Consecuencia

En el marco de las funciones enteras y trascendentes no hay anillos de Herman.

Índice

1. Diferencias entre las dinámicas racional y entera
2. Valores singulares
3. Componentes de Fatou. Clasificación
4. Dominios errantes y de Baker
5. El conjunto de Julia

Otra diferencia importante entre la dinámica racional y la entera es que en esta última sí existen dominios errantes y de Baker.

Ejemplo (Fatou)

Sea $f(z) = 1 + z + e^{-z}$. Primero encontramos los puntos críticos: $f'(z) = 1 - e^{-z} = 0$. Luego $z = 2n\pi i$ con $n \in \mathbb{Z}$. Ahora probaremos que las órbitas que se inician en el semiplano derecho $\mathcal{R}e(z) > 0$ son divergentes. Si $\mathcal{R}e(z) > 0$, se tiene

$$\mathcal{R}e(f(z)) = 1 + \mathcal{R}e(z) + e^{-\mathcal{R}e(z)} \cdot \cos(\mathcal{I}m(z)) \geq \mathcal{R}e(z) + \left(1 - e^{-\mathcal{R}e(z)}\right),$$

siendo el sumando entre paréntesis positivo. Esto prueba que el semiplano derecho es invariante para f y que puede aplicarse la relación anterior a $f(z)$

$$\mathcal{R}e(f^2(z)) \geq \mathcal{R}e(f(z)) + \left(1 - e^{-\mathcal{R}e(f(z))}\right).$$

En general $\mathcal{R}e(f^n(z)) \geq \mathcal{R}e(z) + n\left(1 - e^{-\mathcal{R}e(z)}\right)$, lo que implica que $\lim_{n\to\infty} f^n(z) = \infty$ en el semiplano $\mathcal{R}e(z) > 0$.
Por tanto, $\mathcal{R}e(z) > 0$ **es un dominio de Baker**
Para obtener un ejemplo de dominio errante necesitamos la siguiente proposición.

Proposición

Sea g una función entera tal que $g(z+c) = g(z) + c$ para todo $z \in \mathbb{C}$, siendo c una constante compleja. Se verifica
(i) Si $h(z) = z + c$, entonces $h(\mathbb{F}(g)) = h^{-1}(\mathbb{F}(g)) = \mathbb{F}(g)$.

(ii) Si $f(z) = g(z) + c$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $\mathbb{J}(f) = \mathbb{J}(g)$.

Prueba

Primero debemos probar las relaciones

$$(1) g^n(z+c) = g^n(z) + c \ \text{ y } \ (2) g(z-c) = g(z) - c.$$

En efecto, $g(z) = g(z-c+c) = g(z-c) + c$, luego $g(z-c) = g(z) - c$. La primera se prueba fácilmente por inducción.

Prueba

Primero debemos probar las relaciones

$$(1) g^n(z+c) = g^n(z) + c \ \text{ y } \ (2) g(z-c) = g(z) - c.$$

En efecto, $g(z) = g(z-c+c) = g(z-c)+c$, luego $g(z-c) = g(z) - c$. La primera se prueba fácilmente por inducción.

(i) Sea $z_0 \in \mathbb{F}(g)$ y escogemos un entorno $U \subset \mathbb{F}(g)$ de z_0 donde (g^n) es normal. Por (1), se tiene $g^n(h(z)) = g^n(z) + c$, por lo que se sigue que (g^n) es normal en $h(U)$ y, en consecuencia, $h(z_0) \in \mathbb{F}(g)$. Ahora usando (2) y con el mismo argumento anterior probamos que $h^{-1}(z_0) \in \mathbb{F}(g)$. Por otro lado, se tiene

$$\mathbb{F}(g) = h \circ h^{-1}(\mathbb{F}(g)) \subset h(\mathbb{F}(g)).$$

(ii) Sea z_0 un punto p-periódico repulsor de g y probaremos que $z_0 \in \mathbb{J}(f)$. Para ello, mostraremos que el cociente

$$\frac{|(f^{pn})'(z_0)|}{1 + |f^{pn}(z_0)|^2} \tag{1}$$

tiende a ∞ cuando $n \to \infty$ y el criterio de Marty nos asegura que (f^n) no es normal en un entorno de z_0. Probaremos por inducción la igualdad $f^n(z) = g^n(z) + nc$. En efecto

$$f^{n+1}(z) = f(f^n(z)) = f(g^n(z) + nc) =$$

$$= g(g^n(z) + nc) + c = g^{n+1}(z) + (n+1)c.$$

Finalmente, nótese que

$$f^{pn}(z_0) = g^{pn}(z_0) + nc = z_0 + cn \text{ y } (f^{pn})'(z_0) = (g^{pn})'(z_0) = \lambda^n,$$

donde $\lambda = (g^p)'(z_0)$ es el multiplicador del punto repulsor z_0 y, por tanto, $|\lambda| > 1$.
Entonces el cociente (1) toma la forma

$$\frac{|(f^{pn})'(z_0)|}{1 + |f^{pn}(z_0)|^2} = \frac{|\lambda|^n}{1 + |z_0 + cpn|^2}.$$

Obviamente, el cociente anterior tiende a ∞ cuando $n \to \infty$.
Queda probado, pues, que $z_0 \in \mathbb{J}(f)$ y, en consecuencia, $\mathbb{J}(g) \subset \mathbb{J}(f)$. La otra inclusión se sigue con un argumento análogo intercambiando los papeles de f y g.

Ejemplo 1

Sea $g(z) = z + 1 - e^z$. Los puntos críticos de g son $z = 2\pi ni$ con $n \in \mathbb{Z}$. Estos puntos son también puntos fijos de g. Son, por tanto, superatractores para g. Consideramos la función $f(z) = g(z) + 2\pi i$, entonces g y f están en las condiciones de la proposición anterior y, por tanto, se verifica $\mathbb{F}(g) = \mathbb{F}(f)$.

Ejemplo 1

Sea $g(z) = z + 1 - e^z$. Los puntos críticos de g son $z = 2\pi ni$ con $n \in \mathbb{Z}$. Estos puntos son también puntos fijos de g. Son, por tanto, superatractores para g. Consideramos la función $f(z) = g(z) + 2\pi i$, entonces g y f están en las condiciones de la proposición anterior y, por tanto, se verifica $\mathbb{F}(g) = \mathbb{F}(f)$.

Si denotamos por $U_{2\pi ni}$ la componente de $\mathbb{F}(g)$ que contiene el punto $z_n = 2\pi ni$, entonces cada $U_{2\pi ni}$ es un dominio errante para f pues $f(2\pi ni) = 2(n+1)\pi i$.

Ejemplo 2

Sea $f(z) = z + \lambda \mathrm{sen} z$, siendo λ real y mayor que 1. Los puntos críticos de f son las soluciones de $f'(z) = 1 + \lambda \cos z = 0$. Si ponemos $z_1 = \arccos(-1/\lambda)$ y $z_2 = 2\pi - z_1$, los puntos críticos de f son

$$z_1 + 2\pi n \text{ y } z_2 + 2\pi n \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Nótese que $z_1 \in (0, \pi)$ y $z_2 \in (\pi, 3\pi/2)$. Por tanto:

$$\mathrm{sen}(z_1) = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda} \text{ y } \mathrm{sen}(z_2) = -\frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda}.$$

Luego: $f(z_1) = z_1 + \sqrt{\lambda^2 - 1}$ y $f(z_2) = z_2 - \sqrt{\lambda^2 - 1}$. Entonces, si escogemos λ de modo que $\lambda^2 - 1 = 2\pi$, se verifica

$$f(z_1) = z_1 + 2\pi \ \text{ y } \ f(z_2) = z_2 - 2\pi.$$

Esto se usará más adelante y nos dice que, para $\lambda = \sqrt{4\pi^2 + 1}$, hay infinitos puntos críticos, pero sólo dos órbitas de puntos críticos de f.

Luego: $f(z_1) = z_1 + \sqrt{\lambda^2 - 1}$ y $f(z_2) = z_2 - \sqrt{\lambda^2 - 1}$. Entonces, si escogemos λ de modo que $\lambda^2 - 1 = 2\pi$, se verifica

$$f(z_1) = z_1 + 2\pi \ \text{ y } \ f(z_2) = z_2 - 2\pi.$$

Esto se usará más adelante y nos dice que, para $\lambda = \sqrt{4\pi^2 + 1}$, hay infinitos puntos críticos, pero sólo dos órbitas de puntos críticos de f.
Como $f'(z_1) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(u) - f(z_1)}{u - z_1}\right| < 1 \ \text{ para todo } u \in \mathbb{D}(z_1, \delta).$$

Equivalentemente

$$|f(u) - f(z_1)| < |u - z_1| < \delta \text{ para } u \in \mathbb{D}(z_1, \delta).$$

Si ponemos $U = \mathbb{D}(z_1, \delta)$, lo anterior prueba que

$$f(U) \subset \mathbb{D}(f(z_1), \delta) = 2\pi + \mathbb{D}(z_1, \delta) = 2\pi + U.$$

Por inducción se prueba: $f^n(U) \subset 2\pi n + U$ para $n \in \mathbb{N}$.

Equivalentemente

$$|f(u) - f(z_1)| < |u - z_1| < \delta \text{ para } u \in \mathbb{D}(z_1, \delta).$$

Si ponemos $U = \mathbb{D}(z_1, \delta)$, lo anterior prueba que

$$f(U) \subset \mathbb{D}(f(z_1), \delta) = 2\pi + \mathbb{D}(z_1, \delta) = 2\pi + U.$$

Por inducción se prueba: $f^n(U) \subset 2\pi n + U$ para $n \in \mathbb{N}$.

De la relación anterior, se deduce con facilidad que $(f^n(z))$ tiende a ∞ uniformemente en U.
Por tanto, U está incluido en $\mathbb{F}(f)$.

Vamos a probar que la componente de Fatou a la que pertenece U es un dominio errante de f.

Para ello, veremos que cada recta $x = k\pi$ está contenida en $\mathbb{J}(f)$. Se necesita:

Teorema

Sea f entera tal que el conjunto de sus puntos singulares es acotado. Si $z \in \mathbb{F}(f)$, entonces $\lim_{n\to\infty} f^n(z)$ no puede ser infinito.

Vamos a probar que la componente de Fatou a la que pertenece U es un dominio errante de f.

Para ello, veremos que cada recta $x = k\pi$ está contenida en $\mathbb{J}(f)$. Se necesita:

Teorema

Sea f entera tal que el conjunto de sus puntos singulares es acotado. Si $z \in \mathbb{F}(f)$, entonces $\lim_{n\to\infty} f^n(z)$ no puede ser infinito.

Si $z = k\pi + yi$ con $y \neq 0$, se tiene

$$f(z) = k\pi + iy + \lambda\frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{2i} = k\pi + i[y + (\lambda/2)(e^{y} - e^{-y})].$$

Consideramos k par:

- Caso $y > 0$: $e^y - e^{-y} > 0$, luego $\mathcal{I}m(f(z)) > \mathcal{I}m(z)$.
  Vemos que $f(z)$ se mantiene en la recta $x = k\pi$ y aumenta su parte imaginaria.
  La sucesión $(\mathcal{I}m(f^n(z))$ es creciente pero no puede ser acotada. De serlo $(f^n(z))$ sería convergente hacia un punto finito $z^* = k\pi + y^*i$ ($y^* > 0$), que debería ser un punto fijo de f.
  Pero los únicos puntos fijos de f son : $z = k\pi$ (repulsores).
  Esto prueba que $(\mathcal{I}m(f^n(z))$ no es acotada, lo que implica que la órbita $(f^n(z))$ tiende a ∞.

Consideramos k par:

- Caso $y > 0$: $e^y - e^{-y} > 0$, luego $\mathcal{I}m(f(z)) > \mathcal{I}m(z)$.
  Vemos que $f(z)$ se mantiene en la recta $x = k\pi$ y aumenta su parte imaginaria.
  La sucesión $(\mathcal{I}m(f^n(z))$ es creciente pero no puede ser acotada. De serlo $(f^n(z))$ sería convergente hacia un punto finito $z^* = k\pi + y^* i$ $(y^* > 0)$, que debería ser un punto fijo de f.
  Pero los únicos puntos fijos de f son : $z = k\pi$ (repulsores).
  Esto prueba que $(\mathcal{I}m(f^n(z))$ no es acotada, lo que implica que la órbita $(f^n(z))$ tiende a ∞.

- Caso $y < 0$: $e^y - e^{-y} < 0$, luego $\mathcal{I}m(f(z)) < \mathcal{I}m(z)$.

Definición

Una función entera trascendente se denomina críticamente finita si tiene un número finito de valores singulares.

Definición

Una función entera trascendente se denomina críticamente finita si tiene un número finito de valores singulares.

Se demuestra que las funciones críticamente finitas no poseen dominios de Baker ni dominios errantes.

Las funciones $\lambda \mathrm{sen} z$ y $\lambda \cos z$ son críticamente finitas pues sólo tienen 2 valores críticos y ningún valor asintótico (finito).

Por el contrario, las funciones $z + \lambda \mathrm{sen} z$ y $z + \lambda \cos z$ no son críticamente finitas pues tienen infinitos valores críticos.

Índice

1 Diferencias entre las dinámicas racional y entera

2 Valores singulares

3 Componentes de Fatou. Clasificación

4 Dominios errantes y de Baker

5 El conjunto de Julia

Teorema

Sea f entera tal que el conjunto de sus puntos singulares es acotado. Si $z \in \mathbb{F}(f)$, entonces $\lim_{n\to\infty} f^n(z)$ no puede ser infinito.

Teorema

Sea f entera tal que el conjunto de sus puntos singulares es acotado. Si $z \in \mathbb{F}(f)$, entonces $\lim_{n\to\infty} f^n(z)$ no puede ser infinito.

El conjunto de Julia

Las funciones enteras críticamente finitas tienen la propiedad de que el conjunto de Julia es el cierre del conjunto formado por los puntos con órbita divergente. Esta es otro notable contraste con las funciones polinómicas, pues para estas funciones el conjunto de los puntos con órbita divergente está incluido en el conjunto de Fatou, de hecho, se trata de la cuenca de atracción del punto ∞ que es superatractor para las funciones polinómicas.

Teorema

Sea f entera críticamente finita. Si todo valor singular tiene una órbita divergente o preperiódica, entonces $\mathbb{J}(f) = \mathbb{C}$.

Teorema

Sea f entera críticamente finita. Si todo valor singular tiene una órbita divergente o preperiódica, entonces $\mathbb{J}(f) = \mathbb{C}$.

Ejemplo

1. Sea $E_\lambda(z) = \lambda e^z$, siendo $\lambda > 1/e$. En el apartado siguiente probamos que esta función no tiene puntos fijos reales. La única órbita singular es $(E_\lambda^n(0))$. Por inducción se prueba que es estrictamente creciente y no puede ser convergente por no tener puntos fijos reales. Entonces la órbita debe ser divergente y, por ello, $\mathbb{J}(E_\lambda) = \mathbb{C}$.
El caso $\lambda = 1$ fue conjeturado por Fatou y probado por Misiurewicz 60 años más tarde.